Université de Pau et des Pays de l'Adour

Mémoire de Master 2

Arrangements de droites, champs de vecteurs polynomiaux et algèbres de Lie

Auteur :
Jordy Palafox

Encadrant :
Jacky Cresson

Rapporteur :
Jean Vallès

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications

24 mars 2016

Table des matières

Introduction

Le travail présenté ici a pour but d'établir des liens entre les systèmes dynamiques et la géométrie. En particulier, comment étudier la géométrie par la dynamique ?
Il existe déjà des liens : la connexion de Gauss-Manin entre les connexions intégrables et les diviseurs. Sur la variété riemannienne, les flots géodésiques donnent une dynamique naturelle. Cette dynamique est fortement reliée à la topologie et la géométrie par la courbure.
Nous allons aborder ce problème du côté de l'invariance plutôt que celui de la géométrie, autrement dit on regarde un objet géométrique plongé dans un espace ambiant ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) et on étudie les équations différentielles qui le laissent invariant.
La nature de l'objet fixe la classe des équations différentielles qui le laissent invariant : si on étudie une variété analytique, l'équation différentielle sera analytique, si la variété est algébrique alors l'équation différentielle sera algébrique.
Cette idée se traduit par l'introduction des champs de vecteurs logarithmiques : on retombe sur les notions de géométrie analytique introduites par Saito dans les années 80 et l'ensemble de ces champs est appelé module de dérivation.
On résume notre approche sous le schéma :

$$\underbrace{Objet\ géométrique}_{Géométrie} \Longleftrightarrow \underbrace{Invariance\ par\ des\ équations\ différentielles}_{Systèmes\ dynamiques}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{Ensemble\ des\ champs\ de\ vecteurs\ logarithmiques}_{Algèbre}$$

Questions :
1) Quelle est la structure algébrique des champs de vecteurs logarithmiques ? Nous verrons que c'est un module et même une algèbre de Lie.
2) Quelles informations donne-t-il ?
Dans le cas d'un arrangement de droites $\mathcal{A}$ dont le module de dérivations est noté $D(\mathcal{A})$, la combinatoire de l'objet se lit sur $D(\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ est libre.
Le problème de la liberté de $\mathcal{A}$ est donné par la conjecture de Terao, c'est un problème de nature algébrique sur $D(\mathcal{A})$.

Peut-on repasser par l'intermédiaire de la traduction dynamique pour interpréter dynamiquement de la liberté en étudiant les champs constituant le module de dérivations ?
Pour ce faire, on explore différentes propriétés dynamiques :
(Inv) l'existence de courbes invariantes,

(I) l'intégrabilité,
(L) la linéarisabilité.

Voici le plan que nous suivons dans ce mémoire.

Dans un premier chapitre, nous rappelons les principales définitions de l'invariance d'objets géométriques par des champs de vecteurs puis nous justifions notre approche dynamique de la géométrie en citant deux problèmes importants : la conjecture de Terao issue directement de la géométrie algébrique et le problème du centre issu des systèmes dynamiques qui a une signification géométrique : localement en un point d'équilibre (la plupart du temps 0) les orbites sont toutes périodiques.

Le chapitre 2 permet d'établir le lien $(Inv) \leftrightarrow (I)$ par la méthode de Darboux qui lie invariance de courbes algébriques et intégrabilité de champs de vecteurs. Nous définissons, après quelques exemples, une classe particulière de champs de vecteurs : les **champs de Darboux**. Ces champs possèdent génériquement trois droites invariantes complexes et sont des centres. Dans ce mémoire, nous donnons une **démonstration complète** de ce résultat qui est seulement esquissée dans la littérature (voir [16], page 209 à 211). La notion de *généricité* et l'*action* de $\mathbb{C}^*$ sur les coefficients des champs sont primordiales.

Les rappels de la théorie des algèbres de Lie au chapitre 3 permettent de montrer que le module de dérivations associé à un arrangement de droites peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie. Cette structure peu utilisée habituellement dans l'étude des arrangements de droites est essentielle dans les travaux de dynamique. En particulier, nous exploitons les propriétés particulières de résolubilité et de nilpotence des algèbres de Lie.

Le chapitre 4 concerne un problème important d'intégrabilité connu sous le nom du problème du centre. Nous nous plaçons selon différents points de vue : le premier est l'utilisation de la forme normale de Poincaré-Dulac, que nous caractérisons algébriquement, ainsi que les intégrales premières associées. Nous introduisons notamment les formes prénormales au sens de J.Ecalle. On utilise ensuite le calcul moulien pour réécrire les équations de conjugaison de champs de vecteurs, un théorème de linéarisation formelle et énoncer un théorème d'universalité du moule de linéarisation de champs de vecteurs.
Le point important de ce chapitre est la partie "Résolubilité et centre" dont **l'ensemble des résultats est nouveau**. On introduit deux nouvelles algèbres de Lie : **algèbre de Lie isochrone** et **algèbre de Lie résonante**. Ces algèbres de Lie sont liées à la décomposition en opérateurs différentiels homogènes de champs de vecteurs et donnent des caractérisations fortes sur les champs étudiés : ce sont des centres isochrones holomorphes ou des centres isochrones à vitesse angulaire constante (c'est-à-dire en écriture polaire $\dot{\theta} = 1$). Ces caractérisations sont obtenues grâce aux définitions de nilpotence données dans le chapitre précédent.

Le dernier chapitre permet de montrer les liens $(I) \leftrightarrow (L)$ entre intégrabilité, linéarisabilité et commutation de champs de vecteurs via le crochet de Lie. Les théorèmes donnés permettent d'établir **un nouveau théorème** et un lien entre la conjecture de Terao et l'intégrabilité de champs de vecteurs : des relations de dépendance entre les champs dans le module de dérivations impliquent l'intégrabilité des champs concernés.

Chapitre 1

Approche dynamique de la géométrie

1.1 Invariance et champs de vecteurs logarithmiques

Notre objectif étant l'étude des objets géométriques de manière dynamique, nous allons fixer une classe d'objets géométriques $\mathcal{O}$ par exemple des variétés algébriques, différentielles puis étudier les champs de vecteurs laissant invariant ces objets $\mathcal{O}$.
On notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\nu \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Rappel sur les champs et l'invariance

Définition 1.1.1. *Un champ de vecteurs est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert U de $\mathbb{K}^\nu$ dans $\mathbb{K}^\nu$.*

En utilisant le vocabulaire de la géométrie différentielle, on définit un champ de vecteurs X sur une variété différentielle $\mathbf{M}$ comme une application de $\mathbf{M}$ dans $T\mathbf{M}$ l'espace tangent de $\mathbf{M}$ telle que $p \circ X = Id_{\mathbf{M}}$ où p est la projection $p : T\mathbf{M} \to \mathbf{M}$. On dit qu'un champ de vecteurs sur $\mathbf{M}$ est une section du fibré tangent.
On écrira un champ de vecteurs sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\partial_{x_i} \tag{1.1}$$

où $X_i(x)$ désignera dans ce chapitre une série formelle ou analytique en la variable $x = (x_1, ..., x_\nu) \in \mathbb{K}^\nu$.

Remarque 1.1.2. *L'espace tangent $T\mathbf{M}$ peut être construit comme l'ensemble des dérivations de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{M}, \mathbb{K}^\nu)$, en particulier un champ de vecteurs est une dérivation.*

On rappelle que le flot associé à un champ de vecteurs X est l'application de $\mathbb{K}^\nu \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^\nu$ avec $\varphi_t'(x) = X(\varphi_t(x))$ qui à x associe la solution $\varphi_t(x)$ passant par x en $t = 0$.

Définition 1.1.3. *Un objet géométrique $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}^\nu$ est dit invariant par un champ de vecteurs X si pour tout $x \in \mathcal{O}$, on a $\varphi_t(x) \in \mathcal{O}$ $t \in \mathbb{R}$.*

Dans l'étude des diviseurs de variétés complexes, K.Saito introduit la terminologie suivante (voir [27]) :

Définition 1.1.4. *On appelle champ de vecteurs logarithmique un champ de vecteurs qui laisse invariant $\mathcal{O}$.*

Définition 1.1.5. *On appelle module de dérivations $D(\mathcal{O})$ l'ensemble des champs de vecteurs logarithmiques laissant invariant $\mathcal{O}$.*

1.1.2 Caractérisation pratique de l'invariance

Le flot associé à un champ de vecteurs n'est pas toujours connu, dans ce cas comment caractériser l'invariance ? Nous allons montrer comment procéder dans le cas de sous-variétés de $\mathbb{R}^\nu$ et des courbes algébriques.

Cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^\nu$

Soit $\mathcal{V}$ une sous-variété de $\mathbb{R}^\nu$ définie par $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^\nu / F(x) = 0\}$ où F est une application de $\mathbb{R}^\nu$ dans $\mathbb{R}$.
On se donne un champ de vecteurs $X = \sum\limits_{i=1}^{\nu} X_i(.)\partial_{x_i}$ que l'on peut aussi écrire sous la forme d'une équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x_i} = X(x_i) \\ i = 1, ..., \nu \end{cases} \tag{1.2}$$

Notons $x_0 = (x_0^1, ...x_n^0) \in \mathcal{V}$ et $(x_1(t), ..., x_n(t))$ la solution du champ X passant en $t = 0$ par x_0.
Si $\mathcal{V}$ est invariant par X alors $(x_1(t), ..., x_n(t)) \in \mathcal{V}$ et on a $F(x_1(t), ...x_n(t)) = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.
On a donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(F(x_1(t), ..., x_n(t)) = 0, \ \forall \ t \in \mathbb{R} \\ F(x_0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

En développant l'expression (1.3), on obtient alors pour tout $x \in \mathcal{V}$:

$$\frac{d}{dt}(F(x_1(t), ..., x_n(t)) = \langle \nabla F(x), X(x) \rangle = 0 \tag{1.4}$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire usuel. Or le gradient est orthogonal à la surface de niveau $\{x \in \mathbb{R}^\nu, F(x) = 0\}$ donc le champ de vecteurs X est tangent à $\mathcal{V}$.
On rappelle que X peut être vu comme une dérivation sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^j(\mathcal{V}, \mathbb{R}^\nu)$ avec j au moins égal à 1. On a alors :

$$\begin{aligned} X.F &= \left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\partial_{x_i} \right).F \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\partial_{x_i}(F(x)) \\ &= \langle \nabla F(x), X(x) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.1.6. *Tous les calculs sont valables aussi si on se place dans $\mathbb{C}$.*

Cas des courbes algébriques

Une courbe algébrique est définie comme le lieu d'annulation d'un polynôme. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'invariance est donnée par :

Définition 1.1.7. *Une courbe algébrique définie par un polynôme $f \in \mathbb{K}[x, y]$ est dite invariante sous l'action d'un champ de vecteurs $\chi = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$ s'il existe un polynôme $K \in \mathbb{K}[x, y]$ tel que*

$$\chi(f) = K \times f.$$

Le polynôme K est appelé le cofacteur de f.

1.2 Liens entre dynamique et géométrie

Nous allons illustrer des relations entre la géométrie et les systèmes dynamiques sur deux problèmes : la conjecture de Terao et le 16è*me* problème de Hilbert. On renvoie au livre de Orlik et Terao pour la conjecture de Terao (voir [23]) et à Artés, Dumortier et Llibre pour le problème du centre (voir [2]).

1.2.1 Arrangements de droites et conjecture de Terao

On rappelle qu'un arrangement de droites du plan est une collection finie de droites $\mathcal{A} = \{L_1, ..., L_n\}$ où chaque droite L_i est définie par un polynôme f_i de degré 1 et on associe alors à l'arrangement $\mathcal{A}$ le polynôme $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \prod_{i=1}^{n} L_i$.

Définition 1.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement de droites dans le plan, on définit l'ensemble des champs de vecteurs logarithmiques par*

$$D(\mathcal{A}) = \{\chi \in Der[x, y] \mid \exists K \in \mathbb{R}[x, y],\ \chi(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \times K\}.$$

L'ensemble $D(\mathcal{A})$ est muni d'une structure naturelle de module, on l'appelle module de dérivations de l'arrangement $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.2. *Un arrangement de droites est libre si son module de dérivation est un module libre.*

On dispose d'un critère pratique pour tester la liberté du module de dérivation.

Théorème 1.2.3 (Critère de Saito)**.** *Soient $\chi_1, \chi_2 \in D(\mathcal{A})$, $\chi_i = \chi_{i,x}\partial_x + \chi_{i,y}\partial_y$. On note M la matrice $M_{i,j} = (\chi_{i,j})$. On a alors équivalence entre*

$$i)\ detM \doteq \mathcal{Q}_{\mathcal{A}},$$

$$ii)\ \chi_1, \chi_2\ forment\ une\ base\ de\ D(\mathcal{A}).$$

Le symbole $\doteq$ signifie "à une multiplication près par une constante non nulle ".

On peut associer à un arrangement de droites $\mathcal{A} = \{L_1, ...L_n\}$ un ensemble $L(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{L_i \cap L_j \neq \emptyset | L_i, L_j \in \mathcal{A}\}$. Cet ensemble est partiellement ordonné par l'inclusion inverse.

Conjecture 1.2.4 (Terao)**.** *La liberté d'un arrangement de droites $\mathcal{A}$ dépend uniquement de la combinatoire de $L(\mathcal{A})$ dans un corps de caractéristique nulle.*

Nous étudions ce module de deux façons différentes :
$i)$ de manière algébrique en le munissant d'une structure plus riche : celle d'algèbre de Lie
$ii)$ de manière dynamique via l'étude des champs de vecteurs qui le composent par la théorie des formes normales, la linéarisation, l'intégrabilité et la commutativité via le crochet de Lie.

1.2.2 Le $16^{\text{ème}}$ problème de Hilbert et problème du centre

Ce problème porte sur l'étude du nombre de cycle limite d'un champ de vecteurs polynomial du plan $\chi = P(x,y)\partial_x + Q(x,y)\partial_y$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[x,y]$.
On appelle degré du champ χ le nombre $d = max(deg(P), deg(Q))$.

Définition 1.2.5. *Un cycle limite du champ χ est une orbite périodique isolée, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert dans lequel le cycle est la seule orbite périodique invariante.*

Le $16^{\text{ème}}$ problème de Hilbert donne pour objectif de borner le nombre de cycles limites en fonction du degré du champ χ.

Le problème du centre est une version locale du $16^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. On dit qu'un point d'équilibre d'un champ de vecteurs est un centre si localement toute orbite est périodique.
On cherche à savoir quand un champ polynomial est un centre au voisinage d'un point d'équilibre.
Nous traitons le problème du centre qui est une version locale du problème de Hilbert de plusieurs manières :
$i)$ par la forme normale de Poincaré-Dulac,
$ii)$ en utilisant le calcul moulien,
$iii)$ par la notion nouvelle d'algèbre de Lie isochrone et algèbre de Lie résonante .

Chapitre 2

Intégrabilité et courbes algébriques : la méthode de Darboux

La méthode de Darboux est une méthode géométrique visant à chercher une intégrale première d'un champ de vecteurs par ses courbes algébriques invariantes. Dans un premier temps nous expliquerons en quoi consiste cette méthode puis nous illustrerons à travers trois exemples. Enfin nous citerons une classe particulière de champs de vecteurs : les champs de Darboux qui ont la particularité d'avoir trois droites invariantes complexes et sont des centres. On donne une démonstration complète de ce résultat dont on trouve une esquisse dans [16].

2.1 La méthode de Darboux

On se donne un champ de vecteurs polynômial dans $\mathbb{C}[x,y]$ de la forme

$$\chi = P(x,y)\partial_x + Q(x,y)\partial_y$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[x,y]$. Le champ est associé au système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $\mathscr{C}$ une courbe algébrique défini par $\mathscr{C} = \{f = 0\}$ où $f \in \mathbb{C}[x,y]$.
On rappelle que la condition d'invariance de $\mathscr{C}$ est :

Définition 2.1.1. *La courbe algébrique $\mathscr{C}$ est dite invariante pour le champ χ s'il existe $K \in \mathbb{C}[x,y]$, appelé cofacteur tel que*

$$\chi(f) = K \times f.$$

De plus on a

$$\chi(f) = P\partial_x(f) + Q\partial_y(f) = \langle \chi, \nabla f \rangle,$$

d'où $\langle \chi, \nabla f \rangle = K \times f$ et donc

$$\langle \chi, \nabla f \rangle = 0 \text{ } sur \text{ } \mathscr{C}.$$

On retrouve bien la condition d'invariante par les surfaces de niveau.

Remarque 2.1.2. *Si on étudie un champ de vecteurs réel, il peut être intéressant de la regarder comme un champ complexe et chercher les courbes invariantes complexes.*

Énonçons un lemme et une proposition sur les cofacteurs avant le théorème principal de ce chapitre sur l'intégrabilité.

Lemme 2.1.3. *Soient $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes. On suppose que f et g sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[x, y]$. Alors le système polynômial défini par le champ χ admet $\{fg = 0\}$ comme courbe algébrique invariante de cofacteur K_{fg} si et seulement les courbes $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ sont des courbes algébriques invariantes de cofacteurs $K_f et K_g$ tels que $K_{fg} = K_f + K_g$.*

Démonstration. Comme χ est une dérivation, on a

$$\chi(fg) = \chi(f).g + f.\chi(g).$$

Si $\{fg = 0\}$ est une courbe algébrique invariante alors $\chi(fg) = K_{fg}fg$. On a donc l'égalité

$$\chi(f).g + f.\chi(g) = K_{fg}fg.$$

Par hypothèse, f et g sont premiers entre eux, donc f divise $\chi(f)$ et g divise $\chi(g)$ et il existe K_f et K_g deux polynômes tels que $\chi(f) = K_f f$ et $\chi(g) = K_g g$. En particulier les courbes algébriques $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ sont invariantes. De plus

$$\chi(fg) = K_f fg + K_g fg = K_{fg}fg,$$

on a donc $K_{fg} = K_f + K_g$.
Réciproquement comme $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ sont invariantes, on a

$$\chi(fg) = (K_f + K_g)fg,$$

donc la courbe $\{fg = 0\}$ est invariante de cofacteur $K_{fg} = K_f + K_g$. □

On a une généralisation de ce résultat à n courbes algébriques.

Proposition 2.1.4. *Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que $f = f_1^{n_1}...f_r^{n_r}$ sa factorisation en polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[x, y]$. Alors le champ χ admet $\{f = 0\}$ comme courbe algébrique de cofacteur K_f si et seulement les courbes $\{f_i = 0\}$ pour i=1,...,r sont invariantes de cofacteur K_{f_i} tels que $K_f = \sum_{i=1}^{r} n_i K_i$.*

Démonstration. La démonstration repose sur le même principe que la précédente, on constate que $\chi(f_i^{n_i}) = n_i \chi(f_i) f_i^{n_i - 1}$. On a donc

$$\chi(f) = \chi(f_1^{n_1}...f_r^{n_r}) = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi(f_i) \frac{f}{f_i}.$$

Si f est une courbe algébrique invariante, on a

$$\chi(f) = K_f f = K_f f_1^{n_1}...f_r^{n_r}.$$

En simplifiant on obtient

$$n_1\chi(f_1)f_2...f_r + ... + n_r\chi(f_r)f_1...f_{n_r} = K_f f_1...f_r.$$

Comme les f_i sont premiers entre eux on a $f_i|\chi(f_i)$ donc il existe $K_i \in \mathbb{C}[x,y]$ tel que $\chi(f_i) = K_i f_i$ et donc f_i est une courbe algébrique invariante pour $i = 1, ..., r$. De plus $K_f = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i K_i$. La réciproque est identique à la démonstration du lemme. $\square$

Théorème 2.1.5 (Darboux)**.** *Supposons que le champ de vecteurs χ de degré m, c'est-à-dire $m = max(deg(P), deg(Q))$, admet p courbes algébriques invariantes $\{f_i = 0\}$ de cofacteur K_i, $i = 1, ..., p$.*
i) Il existe p complexes $n_i \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i K_i = 0$ si et seulement si $f_1^{n_1}...f_p^{n_p}$ est une intégrale première du système différentiel (2.1),
ii) Si $p \geq \frac{m(m+1)}{2} + 1$, alors il existe $n_i \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, ..., p$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i K_i = 0$.

Démonstration. $i)$ On calcule $\chi(f_1^{n_1}...f_p^{n_p}) = f_1^{n_1}...f_p^{n_p}(\sum\limits_{i=1}^{p} n_i K_i)$.
On rappelle que si f est une intégrale première d'une équation différentielle alors $\chi(f) = 0$ où χ est le champ de vecteurs associé.
Si $f_1^{n_1}...f_p^{n_p}$ est une intégrale première alors $\chi(f_1^{n_1}...f_p^{n_p}) = 0$ en particulier il existe des $n_i \in \mathbb{C}$ non tous nuls tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i K_i = 0$.
Réciproquement s'il existe des $n_i \in \mathbb{C}$ non tous nuls tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i K_i = 0$ alors $f_1^{n_1}...f_p^{n_p}$ est une intégrale première car $\chi(f_1^{n_1}...f_p^{n_p}) = 0$.

$ii)$ Comme le système est de degré m, le cofacteur K est au plus de degré m-1. Donc K est un élément de $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ l'ensemble des polynômes en x et y de degré au plus $m-1$. On montre par récurrence que la dimension de $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ est $\frac{m(m+1)}{2}$. On a donc p polynômes K_i dans un espace de dimension $\frac{m(m+1)}{2} \leq p$. Les K_i sont donc linéairement dépendants. Autrement dit il existe une famille de complexes n_i, $i = 1, ..., p$ non tous nuls telle que $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i K_i = 0$. $\square$

2.2 Applications de la méthode de Darboux

Nous allons donner dans cette section trois exemples détaillés, les deux premiers montrent une application de chacun des points du théorème de Darboux. Le troisième illustrera le problème des arrangements de droites et le problème du centre.

2.2.1 Exemple 1

Soit a un réel non nul.
On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x}= -y(ay+b)-(x^2+y^2-1) \\ \dot{y}= x(ay+b) \end{cases} \tag{2.2}$$

Le degré de ce système est 2. On définit son champ de vecteurs

$$\chi = (-y(ay+b)-(x^2+y^2-1))\partial_x + x(ay+b)\partial_y.$$

Les courbes algébriques $\{f_1 = ay+b = 0\}$ et $\{f_2 = x^2+y^2-1 = 0\}$ sont invariantes de cofacteurs respectifs $K_1 = ax$ et $K_2 = -2x$.
Vérifions le :

$$\begin{aligned}\chi(f_1) &= (-y(ay+b)-(x^2+y^2-1))\partial_x(ay+b) + x(ay+b)\partial_y(ay+b) \\ &= ax(ay+b) \\ &= K_1 f_1.\end{aligned}$$

De même pour f_2 :

$$\begin{aligned}\chi(f_2) &= (-y(ay+b)-(x^2+y^2-1))\partial_x(x^2+y^2-1) + x(ay+b)\partial_y(x^2+y^2-1) \\ &= 2x(-y(ay+b)-(x^2+y^2-1)) + 2yx(ay+b) \\ &= -2x(x^2+y^2-1) \\ &= K_2 f_2.\end{aligned}$$

On remarque que les cofacteurs vérifient la relation $2K_1 + aK_2 = 0$. Le premier point du théorème de Darboux nous donne l'intégrale première :

$$H = (ay+b)^2(x^2+y^2-1)^a.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\chi(H) &= (-y(ay+b)-(x^2+y^2-1))\partial_x((ay+b)^2(x^2+y^2-1)^a) + x(ay+b)\partial_y((ay+b)^2(x^2+y^2-1)^a) \\ &= 2ax(-y(ay+b)-(x^2+y^2-1))(ay+b)^2(x^2+y^2-1)^{a-1} \\ &+ x(ay+b)\left(2a(ay+b)(x^2+y^2-1)^a + 2ay(x^2+y^2-1)^{a-1}(ay+b)^2\right) \\ &= -2axy(ay+b)^3(x^2+y^2-1)^{a-1} - 2ax(ay+b)^2(x^2+y^2-1)^a \\ &+ 2ax(ay+b)^2(x^2+y^2-1)^a + 2axy(ay+b)^3(x^2+y^2-1)^{a-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

2.2.2 Exemple 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non nuls. Le système différentiel de degré 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}= x(ax+c) \\ \dot{y}= y(2ax+by+c) \end{cases} \tag{2.3}$$

possède cinq droites invariantes

$$i)\ \{f_1 = x = 0\},$$
$$ii)\ \{f_2 = ax + c = 0\},$$
$$iii)\ \{f_3 = y = 0\},$$
$$iv)\ \{f_4 = ax + by = 0\},$$
$$v)\ \{f_5 = ax + by + c = 0\}.$$

dont les cofacteurs sont respectivement $K_1 = ax + c$, $K_2 = ax$, $K_3 = 2ax + by + c$, $K_4 = ax + by + c$, $K_5 = ax + by$.
Le point $ii)$ du théorème de Darboux s'applique ici, en effet on a cinq courbes invariantes et $5 \geq \frac{2\times 3}{2} = 3$. On obtient l'existence d'au moins une relation de dépendance non triviale entre les cofacteurs.
On a par exemple $\sum_{i=1}^{5} n_i K_i = 0$ pour $n_1 = n_5 = -1, n_2 = n_4 = 1$ et $n_3 = 0$. On a donc l'intégrale première suivante :

$$H = \frac{(ax+c)(ax+by)}{x(ax+by+c)}.$$

On remarque que on a aussi $n_1 = n_5 = 0$, $n_2 = n_4 = 1$ et $n_3 = -1$. On a donc une autre intégrale première

$$I = \frac{(ax+c)(ax+by)}{y}.$$

Cela témoigne de la non-unicité de l'intégrale première.

2.2.3 Exemple 3

Soit le champ de vecteurs réel :

$$\chi = (-y - x^2 + y^2)\partial_x + (x + 2xy)\partial_y.$$

Ce champ a trois droites invariantes $\{f_0 = y + \frac{1}{2} = 0\}$ de cofacteur $K_0 = 2x$, $\{f_1 = -\sqrt{3}x + y - 1 = 0\}$ de cofacteur $K_1 = -x - \sqrt{3}y$ et $\{f_2 = \sqrt{3}x + y - 1 = 0\}$ de cofacteur $K_2 = -x + \sqrt{3}y$.
L'arrangement de ces trois droites a la propriété géométrique de former un triangle.

De plus ce champ est un centre par le théorème (admis) suivant :

Théorème 2.2.1 (Bautin-Kapteyn). *Un système quadratique qui a un centre à l'origine peut être sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - bx^2 - Cxy - dy^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + Axy - ay^2 \end{cases} \tag{2.4}$$

Ce système est un centre à l'origine si et seulement si au moins une des conditions suivantes est remplie :

$$\begin{aligned} &i)\ A - 2b = C + 2a = 0, \\ &ii)\ C = a = 0, \\ &iii)\ b + d = 0, \\ &iv)\ C + 2a = A + 3b + 5d = a^2 + bd + 2d^2 = 0. \end{aligned}$$

On renvoie à [2] pour une démonstration.

2.3 Champs de Darboux et arrangements de droites

Nous allons reprendre une partie de la démonstration du théorème de Dulac énoncé dans [16] sur les champs dit de Darboux. Ces champs ont génériquement trois droites invariantes complexes et définissent un centre.

2.3.1 Du champ réel vers le champ complexe

On se donne le champ de vecteurs réel de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x,y) \\ \dot{y} = x + Q(x,y) \end{cases}$$

où $P(x,y) = p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2$ et $Q(x,y) = q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2$.
En posant $z = x + iy$ et $w = x - iy$, on obtient le système complexe de $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} \dot{z} = iz + Az^2 + Bzw + Cw^2 \\ \dot{w} = -iw + C'z^2 + B'zw + A'w^2 \end{cases} \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}\left(p_{20} - ip_{11} - p_{02} + iq_{20} + q_{11} - iq_{02}\right), \\ B &= \frac{1}{2}\left(p_{20} + p_{02} + i(q_{20} + q_{02})\right), \\ C &= \frac{1}{4}\left(p_{20} + ip_{11} - p_{02} + iq_{20} - q_{11} - iq_{02}\right), \end{aligned}$$

et $A' = \bar{A}$, $B' = \bar{B}$ et $C' = \bar{C}$.
On définit l'ensemble des champs de Darboux $\mathcal{D}arb$ par $B = B' = 0$, on a donc :

$$p_{20} = -p_{02},$$
$$q_{20} = -q_{02},$$

et le champ complexe est donné par

$$\begin{cases} \dot{z} = iz + Az^2 + Cw^2 \\ \dot{w} = -iw + C'z^2 + A'w^2 \end{cases} \tag{2.6}$$

De plus, d'après le théorème de Bautin-Kapteyn, le système réel est un centre par la condition *ii*).

2.3.2 Action de $\mathbb{C}^*$ sur les champs quadratiques

On introduit une action de $\mathbb{C}^*$ sur le champ (2.5) définie par :

$$(z, w) \overset{\varphi_\gamma}{\mapsto} (\gamma z, \gamma^{-1} w)$$

où $\gamma \in \mathbb{C}^*$. On appelle l'action de $\mathbb{C}^*$ action diagonale.
Montrons que l'action de $\mathbb{C}^*$ sur les coefficients (A, B, C, A', B', C') du champ de Darboux X et qu'elle laisse invariante la partie linéaire de X :

$$\begin{cases} \gamma\ \dot{z} = i\gamma z + \gamma^2 Az^2 + Bzw + \gamma^{-2} Cw^2 \\ \gamma^{-1}\ \dot{w} = -i\gamma^{-1} w + B'zw + \gamma^2 C'z^2 + \gamma^{-2} A'w^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = iz + \gamma Az^2 + \gamma^{-1} Bzw\gamma^{-3} Cw^2 \\ \dot{w} = -iw + \gamma^3 C'z^2 + \gamma B'zw + \gamma^{-1} A'w^2 \end{cases}$$

L'invariance de la partie linéaire est bien vérifiée, de plus l'action sur les coefficients se traduit par

$$(A, B, C, A', B', C') \mapsto (\gamma A, \gamma^{-1} B, \gamma^{-3} C, \gamma^{-1} A', \gamma B', \gamma^3 C').$$

Le problème qui se pose ici est le choix de l'élément γ, on rappelle que l'on part d'un champ réel pour l'exprimer sous sa forme complexe, on doit donc conserver des propriétés de "symétrie" (conjugaison complexe) sur les coefficients : $A' = \bar{A}$, $B' = \bar{B}$, $C' = \bar{C}$. Après avoir utilisé l'action de $\mathbb{C}^*$, si on veut pouvoir retourner vers le champ réel, les coefficients doivent vérifier :

$$\overline{\gamma A} = \gamma^{-1} A',$$
$$\overline{\gamma^{-1} B} = \gamma B',$$
$$\overline{\gamma^{-3} C} = \gamma^3 C',$$

c'est-à-dire $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$ donc γ doit être choisi sur $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Remarque 2.3.1. *Si on se place dans $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées x et y, par rotation une droite peut être transformée et placée parallèlement à l'axe des abscisses (Ox). Dans $\mathbb{C}$ une telle droite s'écrit $z - w = \alpha$.*

2.3.3 Invariances de droites et généricité

Ces champs ont génériquement trois droites invariantes complexes. Une droite invariante pour le champ complexe est caractérisée par le lemme suivant :

Lemme 2.3.2. *La droite $\{w - z = \alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ est invariante pour le champ (2.6) si et seulement si $C' + A' = C + A$, $2\alpha(C - A') + 2i = 0$ et $\alpha^2(C - A') + i\alpha = 0$.*

Démonstration. On dérive par rapport au temps l'expression $z - w + \alpha$, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(z - w + \alpha) &= \dot{z} - \dot{w} \\ &= iz + Az^2 + Cw^2 + iw - C'z^2 - A'w^2 \\ &= i(z + w) + (A - C')z^2 + (C - A')w^2.\end{aligned}$$

On se place sur la droite $\{w - z = \alpha\}$, d'où $w = z + \alpha$ et on remplace dans l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned}\dot{z} - \dot{w} &= i(2z + \alpha) + (A - C')z^2 + (C - A')(z + \alpha)^2 \\ &= i(2z + \alpha) + (A - C')z^2 + (C - A')(z^2 + 2\alpha z + \alpha^2) \\ &= (A - C' + C - A')z^2 + (2\alpha(C - A') + 2i)z + (i\alpha + (C - A')\alpha^2).\end{aligned}$$

La droite $\{w - z = \alpha\}$ est invariante si et seulement si l'équation $\dot{z} - \dot{w}$ donc si chacun des termes de la dernière équation s'annule c'est-à-dire

$$A + C = C' + A', \quad 2\alpha(C - A') + 2i = 0, \quad i\alpha + (C - A')\alpha^2 = 0.$$

□

<u>*Problème*</u> : Quel est l'ensemble $\mathcal{S}$ des quadruplets $(A, C, A', C') \in \mathbb{C}^4$ tel que les équations $2\alpha(C - A') + 2i = 0$, $i\alpha + (C - A')\alpha^2 = 0$ admettent une solution α ?

Lemme 2.3.3. *L'ensemble solution des deux équations précédentes est*

$$\mathcal{S} = \{(A, C, A', C') \in \mathbb{C}^4 | A' \neq C\}$$

Démonstration. Un élément α vérifiant $2\alpha(C - A') + 2i = 0$ et $i\alpha + (C - A')\alpha^2 = 0$ existe si et seulement $C \neq A'$. Sinon on aurait $2i = 0$. De plus, pour tout quadruplet (A, C, A', C'), on a génériquement une solution, en effet :
en mesure , $\mathbb{C}^4 \setminus \mathcal{S}$ est négligeable, i.e. $mes(\mathbb{C}^4 \setminus \mathcal{S}) = 0$,
en topologie, pour tout quadruplet $M = (A, C, A', C')$, pour toute boule contenant M de rayon ε, il existe un point M' appartement à $\mathcal{S}$. □

On a le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.4. *Génériquement pour un champ de Darboux, il existe un élément* $\alpha \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $2\alpha(C - A') + 2i = 0$, $i\alpha + (C - A')\alpha^2 = 0$.

Quant à la condition $A + C = A' + C'$, elle est liée à l'écriture de la droite dans le système de coordonnées et ne prend pas en compte la conjugaison (l'invariance topologique).
Soit $\mathcal{S}_{droite}$ le sous ensemble de $\mathbb{C}^4$ défini par $\mathcal{S}_{droite} = \{(A, C, A', C') | A' \neq C \ et \ A + C = A' + C'\}$.

On doit alors résoudre l'équation complexe :

$$\gamma^{-3}C + \gamma A = \gamma^{-1}A' + \gamma^3 C'$$

pour $\gamma \in \mathbb{C}^*$. C'est une équation cubique par rapport à γ^2. Comme $\gamma \neq 0$, l'équation peut s'écrire

$$C'X^3 - AX^2 + A'X - C = 0$$

où $X = \gamma^2$. La nouvelle équation a trois solutions, dont l'existence est assurée par le théorème de D'Alembert-Gauss. On a donc trois paires de solutions à l'équation initiale de degré 6. Chaque paire correspond à une droite invariante.

On vient de montrer que l'action $\mathbb{C}^*$ est transitive, puisque si $(A, C, A', C') \notin \mathcal{S}_{droite}$ (car il ne vérifie pas $A + C = A' + C'$), alors il existe $\gamma \in \mathbb{C}^*$ tel que $\varphi_\gamma(X)$ vérifie $A_\gamma + C_\gamma = A'_\gamma + C'_\gamma$ avec $A_\gamma = \gamma A$, $C_\gamma = \gamma^{-3}C$, $A'_\gamma = \gamma^{-1}A$ et $C'_\gamma = \gamma^3 C'$.
La classe des champs de Darboux ayant génériquement trois droites invariantes que l'on considère est en fait le quotient suivant :

$$\mathcal{D}arb \big/ _{\mathbb{C}^*}.$$

Chapitre 3

Module de dérivation d'un arrangement de droites et algèbres de Lie

Ce chapitre introduit les outils concernant les algèbres de Lie qui seront utilisés au chapitre 4 et on démontre que le module de dérivations est une algèbre de Lie.

3.1 Rappel sur les algèbres de Lie

Pour des compléments sur les algèbres de Lie, on renvoie à [3], [4], [17], [24], [25], [29].

3.1.1 Algèbres de Lie et dérivations

On supposera que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 0.

On rappelle qu'une $\mathbb{K} - alg\grave{e}bre$ M est un $\mathbb{K}$-module muni d'une application $\mathbb{K} - bilin\acute{e}aire$: $M \times M \to M$.

Définition 3.1.1. *On appelle algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\mathfrak{g}$ *dont la multiplication (notée* $(x, y) \to [x, y]$ *appelée crochet de Lie) vérifie les identités :*

$$[x, x] = 0, \tag{3.1}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \tag{3.2}$$

pour tous x,y,z $\in \mathfrak{g}$.

La première identité implique *l'anti-symétrie* de la multiplication, en effet pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ on a :

$$[x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0 \tag{3.3}$$

par bilinéarité et par (2.1) et donc

$$[x, y] = -[y, x]. \tag{3.4}$$

La seconde identité s'appelle *identité de Jacobi.*

Exemple 3.1.2. *Pour obtenir une structure d'algèbre de Lie à partir d'une algèbre associative, il suffit de la munir du crochet de Lie défini par* $[x,y] = xy - yx$*, appelé le commutateur.*

Une algèbre de Lie est abélienne ou commutative si tous ses crochets de Lie sont nuls.

Définition 3.1.3. *Une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{f}$ *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre stable pour la multiplication.*

On notera que le produit d'algèbres de Lie est une algèbre de Lie : on définit le crochet "produit" : soient $\{$ et $\}$ deux algèbres de Lie, on définit sur $\{ \times \}$ le crochet $[(x,y),(x',y')] = ([x,x'],[y,y'])$ où $x, x' \in \mho$ et $y, y'\}$.

Définition 3.1.4. *Un homomorphisme de Lie est un homomorphisme d'algèbres qui respecte la multiplication au sens où si l'on note* $[.,.]_{\mathfrak{f}}$ *la multiplication sur* $\mathfrak{f}$*,* $[.,.]_{\mathfrak{g}}$ *celle sur* $\mathfrak{g}$ *et* $\phi : \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ *l'homomorphisme entre les deux algèbres de Lie* $\mathfrak{f}$ *et* $\mathfrak{g}$ *alors pour tout* $x, y \in \mathfrak{A}$ *:*

$$\phi([x,y]_{\mathfrak{f}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{g}}. \tag{3.5}$$

Définition 3.1.5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre. Une dérivation* $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *est une application* $\mathbb{K}$*-linéaire qui vérifie :*

$$\chi(x \times y) = \chi(x) \times y + x \times \chi(y). \tag{3.6}$$

On a la proposition :

Proposition 3.1.6. *L'ensemble* $Der(\mathfrak{g})$ *des dérivations sur* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie si on la munit du crochet suivant :*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1. \tag{3.7}$$

Démonstration. L'addition de deux dérivations est clairement une dérivation, de plus pour loi externe (multiplication par un scalaire i.e. un élément de $\mathbb{K}$) on obtient une structure de $\mathbb{K}$-module. Vérifions la stabilité pour le crochet, autrement dit qu'un crochet de dérivations est toujours une dérivation. Soient D_1,$D_2 \in Der(\mathfrak{g})$ et $x, y \in \mathfrak{g}$, alors :

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](x \times y) &= D_1 \circ D_2(x \times y) - D_2 \circ D_1(x \times y) \\
&= D_1(D_2(x) \times y + x \times D_2(y)) - D_2(D_1(x) \times y + x \times D_1(y) \\
&= D_1 D_2(x) \times y + D_2(x) \times D_1(y) + D_1(x) \times D_2(y) + x \times D_1 D_2(y) \\
&- D_2 D_1(x) \times y - D_1(x) \times D_2(y) - D_2(x) \times D_1(y) - x \times D_2 D_1(y) \\
&= [D_1, D_2](x) \times y + x \times [D_1, D_2](y),
\end{aligned}$$

ainsi l'ensemble des dérivations est stable pour le crochet. □

Théorème 3.1.7. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. On définit pour tout* x *élément de* $\mathfrak{g}$ *l'application* $ad(x)$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *par :*

$$ad(x)(y) = [x, y]. \tag{3.8}$$

Alors $ad(x)$ *a les propriétés suivantes :*
· $ad(x)$ *est une dérivation,*
· *l'application* $x \mapsto ad(x)$ *est un homomorphisme de Lie .*

Démonstration. Démontrons dans un premier temps que $ad(x)$ est une dérivation. Soient $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\begin{aligned} ad(x)[y,z] &= [x,[y,z]] \\ &= [[x,y],z] + [y,[x,z]] \\ &= [ad(x)(y),z] + [y, ad(x)(z)]. \end{aligned}$$

Donc $ad(x)$ est bien une dérivation sur $\mathfrak{g}$.
Pour le second point :

$$\begin{aligned} ad([x,y])(z) =& [[x,y],z] \\ &= ad(x)ad(y)(z) - ad(y)ad(x)(z) \\ &= [ad(x), ad(y)](z), \end{aligned}$$

on a donc montré que $x \mapsto ad(x)$ est un homomorphisme de Lie.

□

L'application $ad(x)$ est appelée *dérivation intérieure* et permet de définir les idéaux d'une algèbre de Lie.

Définition 3.1.8. *Un idéal $\mathcal{I}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$ stable pour les dérivations intérieures. On appelle idéal caractéristique un sous-module stable pour toutes les dérivations de $\mathfrak{g}$.*

En particulier le quotient $\mathfrak{g}/_{\mathcal{I}}$ est une algèbre de Lie.

3.1.2 Algèbre enveloppante universelle et symétrique

Dans ce qui suit nous serons amenés à travailler dans l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie, nous allons donc la définir ici.

Théorème 3.1.9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau $\mathbb{K}$. Alors il existe une algèbre associative $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ unique à isomorphisme près sur $\mathbb{K}$ et un morphisme d'algèbres de Lie $i : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ ayant la propriété universelle suivante :*
pour toute algèbre associative $\mathscr{A}$ et tout morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathscr{A}$ il existe un unique morphisme d'algèbres $\overline{\varphi} : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \to \mathscr{A}$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & \mathscr{A} & \end{tikzcd}$$

L'algèbre associative $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ est appelée l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Pour démontrer l'unicité, on suppose par l'absurde qu'il existe deux couples $(\mathcal{L}^1_{\mathfrak{g}}, i_1)$ et $(\mathcal{L}^2_{\mathfrak{g}}, i_2)$ qui vérifient les propriétés énoncées donc en particulier on obtient les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & \mathcal{L}^1_{\mathfrak{g}} \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathcal{L}^2_{\mathfrak{g}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "i_2"] \arrow[dr, "i_1"'] & & \mathcal{L}^2_{\mathfrak{g}} \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathcal{L}^1_{\mathfrak{g}} & \end{tikzcd}$$

On a les deux relations :

$$\varphi \circ i_1 = i_2 \ et \ \psi \circ i_2 = i_1.$$

En remplaçant dans chaque équation par les expressions de i_1 et i_2 on a :

$$\varphi \circ \psi \circ i_2 = i_2 \ et \ \psi \circ \varphi \circ i_1 = i_1.$$

et donc :

$$\varphi \circ \psi = Id_{\mathcal{L}^2_{\mathfrak{g}}} \ et \ \psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{L}^1_{\mathfrak{g}}}.$$

D'où l'isomorphisme . Montrons maintenant l'existence d'une telle algèbre. Pour cela on doit considérer l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ définie par :

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}^{\bigotimes^n}$$

où $\mathfrak{g}^{\bigotimes^n} = \mathfrak{g} \bigotimes ... \bigotimes \mathfrak{g}$ est n fois le produit tensoriel de $\mathfrak{g}$. On a une structure naturelle d'algèbre associative unitaire donnée par :

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n) \times (y_1 \otimes ... \otimes y_n) = x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n$$
$$a \times (x_1 \otimes ... \otimes x_n) = a(x_1 \otimes ... \otimes x_n)$$
$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n) \times a = (x_1 \otimes ... \otimes x_n)a$$

pour $a \in \mathbb{K}$.

Notons I l'idéal de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme $[x, y] - x \otimes y - y \otimes x$, avec $x, y \in \mathfrak{g}$.

L'algèbre enveloppante universelle est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{g}} = T(\mathfrak{g})/_I.$$

Soit φ un morphisme de Lie de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative $\mathscr{A}$, j l'injection de $\mathfrak{g}$ dans $T(\mathfrak{g})$ et p la projection canonique $T(\mathfrak{g})$ sur $T(\mathfrak{g})/_I$. On a $Ker(p) = I$ et par définition de I, $p([x, y]-x\otimes y-y\otimes x) = 0$ d'où $p([x, y]) = p(x \otimes y - y \otimes x)$. On définit l'injection i de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ par la composition $i = p \circ j$ alors pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ on a $i([x, y]) = p([x, y]) = p(x \otimes y - y \otimes x) = p(x)p(y) - p(y)p(x) = [p(x), p(y)] = [p \circ j(x), p \circ j(y)] = [i(x), i(y)]$ et i est bien un homomorphisme de Lie.

Maintenant on veut construire l'extension d'un morphisme de Lie φ de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative $\mathscr{A}$ et vérifier la commutativité du diagramme. On peut étendre de manière unique φ à $T(\mathfrak{g}$ en le morphisme $\psi : T(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$ de la manière suivante :

$$\psi(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = \varphi(x_1)...\varphi(x_n).$$

On a alors pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, $\psi(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) - \varphi([x,y]) = 0$ puisque φ est un morphisme de Lie. Ainsi $I \subset Ker(\psi)$ ce qui permet de définir un morphisme d'algèbres $\overline{\varphi} : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \to \mathscr{A}$ vérifiant $\psi = \overline{\varphi} \circ p$. On obtient finalement la commutativité par la relation $\overline{\varphi} \circ i = \overline{\varphi} \circ p \circ j = \psi \circ j(x) = \varphi(x)$. Ce qui conclut la démonstration. $\square$

Si l'on a une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ abélienne, c'est-à-dire tous ses crochets sont nuls, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Dans ce cas l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ est appelée l'algèbre symétrique et on la notera $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}$.
De manière constructive, on définit $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}$ par :

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{\mathfrak{g}}^n$$

où $\mathcal{S}_{\mathfrak{g}}^n = \bigotimes^n \mathfrak{g}/_I$ où I est l'idéal engendré par les éléments de la forme $x - \sigma x$ avec σ une permutation de $[1, n]$ et $x \in \bigotimes^n \mathfrak{g}$.

3.1.3 Magma et algèbre de Lie libre

Dans cette partie nous rappellerons les définitions de magna libre et algèbre de Lie libre, puis nous donnerons un procédé de construction d'une algèbre de Lie libre à partir d'un ensemble fini.

On rappelle qu'un magma $\mathcal{X}$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne, c'est-à-dire une application $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ notée par $(x, y) \mapsto xy$.

On se donne un ensemble $\mathcal{X}$ fini. On construit une famille d'ensembles $(\chi_n)_{n \geq 1}$ par récurrence à partir de $\mathcal{X}$ en posant :

$$i)\ \chi_1 = \mathcal{X}, \tag{3.9}$$

$$ii)\ pour\ n \geq 2,\ \chi_n = \coprod_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 1}} \chi_p \times \chi_q. \tag{3.10}$$

Soient $x, y, z, t \in \mathcal{X}$. Pour $n = 2$, les éléments de χ_2 sont de la forme (x, y), si $n = 3$ les éléments de χ_3 sont de la forme $(x, (y, z))$ et $((x, y), z)$, pour $n = 4$ $((x, y), (z, t))$, $(x, (y, (z, t)))$, $(x, ((y, z), t))$,$((x, (y, z)), t)$ et $(((x, y), z), t)$.

On pose $\mathcal{M}_{\mathcal{X}} = \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} \chi_n$. On définit sur cet ensemble la multiplication suivante :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{M}_{\mathcal{X}} \tag{3.11}$$

$$x_p \times x_q \mapsto (x_p, x_q) \in \chi_{p+q} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{X}} \tag{3.12}$$

avec $x_p \in \chi_p$ et $x_q \in \chi_q$ et $\to$ désigne l'inclusion canonique définie par (3.10). On peut dire que $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$ est l'ensemble des mots parenthésés construits sur $\mathcal{X}$.
On définit la longueur d'un mot parenthésé ω comme l'unique entier n tel que un mot $\omega \in \chi_n$.

Maintenant on se donne un corps $\mathbb{K}$ et on définit la $\mathbb{K} - alg\grave{e}bre$ $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ du magna libre $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$ comme l'ensemble des éléments α de la forme :

$$\alpha = \sum_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}} c_m \cdot m \ , \ c_m \in \mathbb{K} \tag{3.13}$$

muni de la multiplication de $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$ étendue à $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ telle que pour $\alpha = \sum\limits_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}} \alpha_m \cdot m$ et $\beta = \sum\limits_{n \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}} \beta_n \cdot n$ $\in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}$, on ait :

$$(\alpha, \beta) = \sum_{m,n \in \mathcal{M}_{\mathcal{X}}} \alpha_m \beta_n (m, n). \tag{3.14}$$

L'algèbre ainsi définie est appelée algèbre libre $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$.

On obtient alors l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ en quotientant $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ par l'idéal $\mathcal{I}$ engendré par les éléments de la forme :

$$\cdot\ (a, a) \text{ où } a \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}, \tag{3.15}$$

$$\cdot\ J(a, b, c) = ((a, b), c) + ((b, c), a) + ((c, a), b) \text{ avec } a, b, c \ \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}. \tag{3.16}$$

On a alors $(a, a) = 0$ et $J(a, b, c) = 0$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$, la première identité correspond à l'antisymétrie et la seconde à l'identité de Jacobi .

On va donner une définition plus générale :

Définition 3.1.10. *Soient $\mathcal{L}_0$ une algèbre de Lie sur un anneau commutatif unitaire $\mathbb{K}$, un ensemble $\mathcal{X}$ et une application $i : \mathcal{X} \to \mathcal{L}_0$. On dit que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_0$ est libre sur $\mathcal{X}$ si pour toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ et toute application $f : \mathcal{X} \to \mathcal{L}$, il existe un unique homomorphisme d'algèbre de Lie $\overline{f} : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{L}_0 \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & \mathcal{L} & \end{tikzcd}$$

autrement dit : $f = \overline{f} \circ i$.

On a en fait démontré le théorème suivant :

Théorème 3.1.11. *Pour tout ensemble $\mathcal{X}$, il existe une algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ libre sur $\mathcal{X}$ unique à isomorphisme près. De plus, $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ est naturellement graduée, i est injective et les composantes de degré 1 de $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ est un sous-module engendré par $\mathcal{X} = i(\mathcal{X})$.*

Démonstration. La graduation est donnée par la longueur des mots parenthésés. L'injectivité est évidente. L'ensemble des composantes de degré 1 est $\bigoplus\limits_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{K}x$. Prouvons l'unicité : on suppose qu'il existe deux algèbres de Lie libre sur $\mathcal{X}$, notons les $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$. On a alors les deux diagrammes commutatifs suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{L} \arrow[dl, "\overline{j}"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, "\overline{i}"] \\ & \mathcal{L} & \end{tikzcd}$$

et on a alors les deux relations $j = \overline{j} \circ i$ et $i = \overline{i} \circ j$. On trouve donc $i = \overline{i} \circ j = \overline{i} \circ \overline{j} \circ i$ ainsi $\overline{i} \circ \overline{j} = id$ et $j = \overline{j} \circ \overline{i} \circ j$ d'où $\overline{j} \circ \overline{i} = id$. D'où l'isomorphisme entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$. □

3.2 Algèbre de Lie de $D(\mathcal{A})$

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.
Le module de dérivations d'un arrangement de droites $\mathcal{A}$ de polynôme $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie. On pourra l'étudier via les nouveaux outils à disposition notamment la résolubilité.

Définition 3.2.1. *On définit le crochet de deux champs de vecteurs χ_1 et χ_2 par*

$$[\chi_1, \chi_2] = \chi_1(\chi_2) - \chi_2(\chi_1).$$

Proposition 3.2.2. *Le quadruplet $(D(\mathcal{A}), +, ., [., .])$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.*

Démonstration. Soient χ_1 et χ_2 deux éléments de $D(\mathcal{A})$ de cofacteur K_1 et K_2 respectivement et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned}(\lambda\chi_1 + \chi_2)(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) &= \lambda\chi_1(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) + \chi_2(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) \\ &= \lambda K_1 \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + K_2 \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \\ &= (\lambda K_1 + K_2)\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Vérifions la stabilité du crochet en utilisant le fait que les champs de vecteurs logarithmiques sont des dérivations :

$$\begin{aligned}[\chi_1, \chi_2](\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) &= \chi_1(\chi_2(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}})) - \chi_2(\chi_1(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}})) \\ &= \chi_1(K_2\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) - \chi_2(K_1\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) \\ &= \chi_1(K_2)\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + K_2\chi_1(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) - \chi_2(K_1)\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} - K_1\chi_2(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) \\ &= \chi_1(K_2)\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + K_2K_1\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} - \chi_2(K_1)\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} - K_1K_2(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) \\ &= (\chi_1(K_2) - \chi_2(K_1))\,\mathcal{Q}_{\mathcal{A}},\end{aligned}$$

avec $\chi_1(K_2) - \chi_2(K_1) \in \mathbb{R}[x, y]$. Ce qui conclut la démonstration. □

3.3 Résolubilité et nilpotence des algèbres de Lie

3.3.1 Algèbres de Lie nilpotente

Définition 3.3.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie, on définit sa série centrale descendante par :*

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},$$
$$\mathcal{C}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$
$$\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})] \text{ pour } i \geq 2.$$

Les $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ sont des idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$ et les quotients $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$ sont des idéaux centraux (inclus dans le centre) de $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$.

Définition 3.3.2. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente si* $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = 0$ *pour un certain* n.

La propriété de nilpotence est vérifiée pour les sous-algèbres d'une algèbre de Lie nilpotente et passe au quotient.

3.3.2 Algèbres de Lie résolubles

Définition 3.3.3. *On appelle sous-algèbre dérivée ou idéal dérivé de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *l'ensemble* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *dont les éléments sont des sommes (finies) de crochets d'éléments de* $\mathfrak{g}$.

Remarquons que le quotient $\mathfrak{g}/\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est abélien.

Lemme 3.3.4. *Soit* I *un idéal de* $\mathfrak{g}$*.Le quotient* $\mathfrak{g}/I$ *est abélien si et seulement si* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset I$

Démonstration. $\mathfrak{g}/I$ est abélien si et seulement si pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, $[x, y] = 0$, i.e $[x, y] \in I$ si et seulement si $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset I$. □

Définition 3.3.5. *On appelle série dérivée de* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie la suite d'ensemble :*

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},$$
$$\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$
$$\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})] \text{ pour } i \geq 1.$$

Les $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$ sont des idéaux des $\mathcal{D}^{i-1}(\mathfrak{g})$. De plus l'algèbre de Lie quotient $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})/\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$ est abélienne. Les idéaux $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$ sont des idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$.

Définition 3.3.6. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est résoluble s'il existe une suite finie de sous-algèbres*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n+1} = 0$$

telle que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ *pour i=0,...,n. Autrement dit* $\mathfrak{g}_{i+1}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}_i$ *et le quotient* $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ *est abélien.*

Proposition 3.3.7. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est résoluble si et seulement si* $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$ *pour un certain* n.

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble il existe une suite finie comme énoncé dans la définition précédente. Comme $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_i$ pour tout i alors $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$. Réciproquement on définit une telle suite en posant $\mathfrak{g}_i = \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$. $\square$

On remarquera que la nilpotence implique la résolubilité.
On termine cette section par la proposition suivante :

Proposition 3.3.8. *i) Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors toute sous-algèbre et algèbre quotiente de $\mathfrak{g}$ est résoluble.*
ii) Si I est un idéal de $\mathfrak{g}$ résoluble et que $\mathfrak{g}/I$ l'est aussi alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Chapitre 4

Résolubilité, problème du centre et intégrabilité

Le chapitre 2 établit une relation entre l'invariance de courbes algèbres et l'intégrabilité via la théorie de Darboux, par ailleurs le chapitre 3 assure que le module de dérivations est une algèbre de Lie. Dans ce chapitre nous relions l'intégrabilité d'un champ de vecteurs et des propriétés se lisant sur les algèbres de Lie associées à ce champ dans le cadre d'un problème important d'intégrabilité, le problème du centre qui est une version locale du $16^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. Pour ce faire on utilise un langage algébro-combinatoire appelé calcul moulien introduit par Jean Ecalle dans les années 70. Après avoir introduit deux nouvelles algèbres de Lie appelées algèbre de Lie isochrone et algèbre de Lie résonante nous démontrons plusieurs résultats nouveaux. Ces résultats étendent des résultats existants sur le sujet de manière algorithmique et explicite.

4.1 Le problème du centre

Nous allons étudier les équations différentiels dans le plan de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}= -y + P(x,y) \\ \dot{y}= x + Q(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

avec P et Q deux polynômes à coefficients réels de degré ≥ 2. Dans le cas où $P = Q = 0$ c'est un système linéaire dont les valeurs propres de la partie linéaire sont complexes $-i$ et i, c'est ce qu'on appelle un centre, géométriquement on obtient que toutes les solutions sont périodiques de période 1 sur des cercles (topologiques) centrés en 0. Si P ou Q est non nul, la conjecture de Dulac affirme qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites périodiques et que ceux sont des cycles limites.

Le problème du centre consiste à caractériser tous les couples (P, Q) tels que le système associé ait toutes ses orbites périodiques dans un voisinage du centre.
Nous utiliserons comme définition de centre une caractérisation obtenu par M.Malgrange et Moussu qui est :

Définition 4.1.1. *Un système de la forme (4.1) est un centre si et seulement si il possède une intégrale* *première formelle.*

On rappelle qu'une intégrale première formelle est une fonction formelle constante sur les solutions du système.
On trouve dans [12](page 208) le théorème suivant :

Théorème 4.1.2. *Un champ de vecteurs de* $\mathbb{R}^2$*de la forme :*

$$X = x\partial_y - y\partial_x + \sum_{2\leq i+j\leq d} (a_{i,j}x^iy^j\partial_x + b_{i,j}x^iy^j\partial_y) \tag{4.2}$$

a un centre à l'origine si et seulement si il possède un germe d'intégrale première analytique à l'origine qui est tangente à $f_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

On fait alors le lien avec l'intégrale formelle par l'article de Malgrange cité plus haut où il démontre l'équivalence facteur intégrant formelle et facteur intégrant analytique.

On peut citer des sous problèmes du centre, le problème du centre isochrone dont le but est de trouver des conditions sur (P,Q) pour que les orbites soient toutes de même période au voisinage de l'origine ou encore le centre isochrone $\dot{\theta} = 1$ où la vitesse angulaire est constante en coordonnées polaires.
On trouvera dans [6] et [30] des exposés développés sur le problème du centre.

4.2 Caractérisations algébriques des centres et formes prénormales

4.2.1 Le passage en complexe

Le champ X d'expression (4.1) n'est pas sous forme diagonale, un moyen de le rendre diagonale est de passer sous forme complexe.
On pose $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. On a :

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{x} + i\,\dot{y} \\
&= -y + P(x,y) + ix + iQ(x,y) \\
&= i(x+iy) + P(x,y) + iQ(x,y) \\
&= iz + R(z,\bar{z}),
\end{aligned}$$

où $R(z,\bar{z}) = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{-i(z-\bar{z})}{2}$.
De même :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{z}} &= \dot{x} - i\,\dot{y} \\
&= -y + P(x,y) - ix - iQ(x,y) \\
&= -i(x-iy) + P(x,y) - iQ(x,y) \\
&= -i\bar{z} + \bar{R}(z,\bar{z}),
\end{aligned}$$

avec $\bar{R}(z,\bar{z}) = P(x,y) - iQ(x,y)$.
Le polynôme R est donc de la forme $R(z,\bar{z}) = \sum\limits_{n,m} a_{n,m} z^n \bar{z}^m$ et $\bar{R}$ de la forme $\bar{R}(z,\bar{z}) = \sum\limits_{n,m} \bar{a}_{n,m} z^m \bar{z}^n$.
Le système devient un système de $\mathbb{C}^2$ et est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(z,\bar{z}) \\ \bar{R}(z,\bar{z}) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

4.2.2 Intégrales premières et forme normale de Poincaré-Dulac

Pour les formes normales et prénormales, voir [1], [7], [8], [22].

On cherche à caractériser les intégrales premières du système (4.3). On rappelle qu'une intégrale première est une fonction de la forme

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{n,m} f_{n,m} z^n \bar{z}^m$$

de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ qui est constante sur les solutions $(z(t),\bar{z}(t))$ du système. On va utiliser la caractérisation suivante de l'intégrale première

$$\dot{f}\ (z(t),\bar{z}(t)) = 0.$$

Nous allons passer le système sous la forme de Poincaré-Dulac pour cela on introduit la résonance de valeurs propres.

Définition 4.2.1. *On dit qu'un $\nu-$uplet $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$ est résonnant s'il existe un $i \in \{1,...,\nu\}$ et $k = (k_1,...,k_\nu) \in \mathbb{N}^\nu$ tel que :*

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{\nu} k_j \lambda_j,$$

où k vérifie $|k| = \sum\limits_{j=1}^{\nu} k_j \geq 2$

Définition 4.2.2. *Soit $(z_1,...,z_\nu)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^\nu$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}^\nu$ le spectre de la partie linéaire d'un champ de vecteurs X de $\mathbb{C}^\nu$ que l'on note X_{lin}. Le monôme $z^k \partial_{z_j}$ est résonant si $k \in \mathbb{N}^\nu$, j et λ vérifie la définition précédente.*

On peut maintenant énoncer le théorème :

Théorème 4.2.3 (Poincaré-Dulac)**.** *Il existe toujours un changement de variables formel qui ramène un champ de vecteurs de partie linéaire résonante à sa forme résonante de la forme*

$$X_{Poin} = X_{lin} + \sum a_k z^k \partial_{z_j}$$

où les $z^k \partial_{z_j}$ sont des monômes résonants.

Remarque 4.2.4. *Ces définitions et théorèmes sont valables dans $\mathbb{R}^\nu$.*

Dans le champ (4.3), les valeurs propres sont $-i$ et i on cherche donc à résoudre

$$i = in_1 - in_2 \text{ ou encore } 1 = n_1 - n_2,$$

avec $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ et $n_1 + n_2 \geq 2$. L'ensemble solution est donc

$$\{(k+1, k) | k \geq 1\}.$$

Les monômes résonants sont donc de la forme

$$|z|^{2k} z \partial_z.$$

De même en résolvant

$$-i = in_1 - in_2 \text{ ou en simplifiant } -1 = n_1 - n_2,$$

on obtient l'ensemble solution

$$\{(k, k+1) | k \geq 1\}$$

et les monômes résonants sont de la forme

$$|z|^{2k} \bar{z} \partial_{\bar{z}}.$$

La forme normale de Poincaré-Dulac est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z} = iz + \sum\limits_{k \geq 1} A_k |z|^{2k} z \\ \dot{\bar{z}} = -i\bar{z} + \sum\limits_{k \geq 1} \bar{A}_k |z|^{2k} \bar{z} \end{cases} \tag{4.4}$$

où $A_n \in \mathbb{C}$, c'est un champ de vecteurs formel.

La forme normale de Poincaré-Dulac est une forme prénormale au sens de Ecalle-Vallet, en effet :

Définition 4.2.5. *Une forme prénormale d'un champ de vecteurs X de partie linéaire X_{lin} diagonale est la donnée d'un champ de vecteurs X_{pran} de la forme*

$$X_{pran} = X_{lin} + X_r \text{ avec } [X_{lin}, X_r] = 0.$$

Ici la partie linéaire est diagonale de spectre $\{i, -i\}$. La partie X_{lin} est donc de la forme

$$X_{lin} = iz\partial_z - i\bar{z}\partial_{\bar{z}}$$

et la partie résonnante X_r est

$$X_r = \left(\sum_{k\geq 1} A_n |z|^{2k} z\right) \partial_z + \left(\sum_{k\geq 1} \bar{A}_k |z|^{2k} \bar{z}\right) \partial_{\bar{z}}.$$

Un simple calcul donne $[X_{lin}], X_r] = 0$.
On notera que la partie X_r du champ X n'est constituée que de monômes résonnants comme on le voit dans la proposition suivante :

Proposition 4.2.6. *Soit X un champ de vecteurs formel de $\mathbb{C}^\nu$ de partie linéaire X_{lin} de spectre λ. Soit X_{pran} une forme prénormale de X. Alors X_{pran} est de la forme*

$$X_{pran} = X_{lin} + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k\in R_j(X)} a_k x^k \partial_{x_j}$$

où $R_j(X) = \{k \in \mathbb{N}^\nu,\ k \neq 0$ tels que $|k| \geq 2$ et $\lambda_j = \langle k, \lambda\rangle\}$ et $a_m \in \mathbb{C}$.

Démonstration. On peut restreindre la démonstration à un monôme par linéarité du crochet de Lie. Prenons donc un monôme $x^k \partial_{x_j}$ avec $k \in \mathbb{N}^\nu$ et $j \in \{1, ..., \nu\}$. On a alors

$$[x^k \partial_{x_j}, X_{lin}] = x^k(\lambda_j - \sum_{i=1}^{\nu} k_i \lambda_i) \partial_{x_j},$$

ce crochet est donc nul si et seulement si λ est résonant. On a donc bien que le champ X_r dans la définition des formes prénormales n'est composé que des termes résonants. □

On remarquera que la forme prénormale d'un champ de vecteurs n'est pas unique.
On définit l'ensemble E_k l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^\nu$ de degré $k \geq 2$ c'est-à-dire que chaque coordonnée dans la base des $\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_\nu}$ est un polynôme en $x_1, ..., x_\nu$ de degré k. On définit alors l'ensemble gradué

$$E = \bigoplus_{k\geq 2} E_k$$

ce qui permet d'écrire tout champ de vecteurs X sous la forme $X = \sum_{k\geq 2} X_k$.
On définit alors l'application $ad(X_{lin}) : Y \mapsto [X_{lin}, Y]$ de E dans E. On notera que E_k est stable sous l'action de $ad(X_{lin})$.

Lemme 4.2.7. *En posant $X_{lin} = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j x_j \partial_{x_j}$ et en considérant $ad(X_{lin})$ défini précédemment on a $Ker(ad(X_{lin}) = \{0\}$ si et seulement si λ est résonant.*

Démonstration. On peut encore raisonner sur les monômes $x^k \partial_{x_j}$. Si λ n'est pas résonant alors $(\lambda_j - \sum_{i=1}^{\nu} k_i \lambda_i) \neq 0$ d'où $Ker(ad(X_{lin}) = \{0\}$. Réciproquement si $Ker(ad(X_{lin})) = \{0\}$ alors $(\lambda_j - \sum_{i=1}^{\nu} k_i \lambda_i) \neq 0$ et λ n'est pas résonant. □

Corollaire 4.2.8. *Si le spectre λ de X_{lin} n'est pas résonant, alors $X_{pran} = X_{lin}$*

Démonstration. Le théorème de Poincaré-Dulac donne un algorithme de construction d'une forme prénormale et en assure ainsi l'existence. Comme la forme prénormale X_{pran} est de la forme $X_{lin}+X_r$, on a $X_r = 0$ puisqu'il n'y a aucun terme résonant. Ainsi $X_{pran} = X_{lin}$. □

Proposition 4.2.9. *Si le spectre λ de X_{lin} est résonant, une forme prénormale d'un champ X n'est pas unique.*

Démonstration. Le théorème de Poincaré-Dulac assure l'existence d'au moins une forme prénormale $X_{pran} = X_{lin} + X_r$. Si le spectre est résonant alors $Ker(ad(X_{lin})) \neq \{0\}$ d'après le lemme 4.2.7, alors X_r n'est pas unique donc la forme prénormale non plus. □

Nous allons maintenant caractériser les intégrales premières de (4.4) :

Théorème 4.2.10. *Les intégrales premières formelles de (4.4) sont nécessairement de la forme*

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{n\geq 0} f_n |z|^{2n}, \;\; f_n \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. En utilisant la forme générale des intégrales premières formelles et par leur caractérisation on a

$$\dot{f}\ (z(t), \bar{z}(t)) = \partial_z f.\ \dot{z} + \partial_{\bar{z}} f.\ \dot{\bar{z}} = 0,$$

et en remplaçant par les expressions du système on obtient

$$\sum_{n,m} f_{n,m} n z^{n-1} \bar{z}^m (iz + \sum_{k\geq 1} A_n |z|^{2k}) + \sum_{n,m} f_{n,m} m z^n \bar{z}^{m-1} (-i\bar{z} + \sum_{k\geq 1} \bar{A}_k |z|^{2n} \bar{z}) = 0,$$

d'où

$$\sum_{n,m} i f_{n,m} (n-m) z^n \bar{z}^m + \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{n,m} f_{n,m} (nA_k + m\bar{A}_k) z^n \bar{z}^m \right) |z|^{2n} = 0. \tag{4.5}$$

On va maintenant travailler dans l'expression (4.5) sur le degré des composantes homogènes.
On fixe $K \geq 1$ un entier. Supposons que $f_{n,m} = 0$ pour tous les couples (n, m) tels que $n + m \leq K$ avec $n \neq m$. On va vérifier que tous les $f_{n,m}$ avec $n + m = K + 1$ et $n \neq m$ sont nuls.
L'expression (4.5) devient alors :

$$\sum_{n+m\geq K+1} f_{n,m} (n-m) z^n \bar{z}^m + \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{2l\leq K} f_{l,l} l (A_k + \bar{A}_k) |z|^{2l} + \sum_{n+m\geq K+1} f_{n,m} (nA_k + m\bar{A}_k) z^n \bar{z}^m \right) |z|^{2k} = 0. \tag{4.6}$$

Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^2$ tel que $N + M = K + 1$ et $N \neq M$. Le coefficient $Coeff(N, M)$ de $z^N \bar{z}^M$ est donné par :

$$Coeff(N, M) = i f_{N,M} (N - M).$$

En effet le monôme $z^N\bar{z}^M$ n'apparaît que dans la première somme de (4.6) car $N \neq M$ donc il n'apparaît pas dans la seconde somme et dans la troisième de (4.6) comme $k \geq 1$ et $n+m \geq K+1$ le degré de $z^n\bar{z}^m$ est au moins $K+3$.
On a donc $Coeff(N,M) = 0$ et donc $f_{N,M} = 0$ pour les couples (N,M) tels que $N+M = K+1$ et $N \neq M$. On conclut par récurrence que l'intégrale première est forcément de la forme énoncée avec $N = M$. □

4.2.3 Conditions de centre et forme normale de Poincaré-Dulac

Nous allons donner des conditions sur les coefficients sur la forme normale de Poincaré-Dulac pour que le système soit un centre. Avant cela nous introduisons quelques définitions.

Un champ de vecteurs est dit nihilent s'il possède au moins une intégrale première formelle.
On définit le degré de nihilence de X, noté nil, le nombre maximale d'intégrales premières formelles indépendantes de X. La nihilence est dite totale si nil est égal au degré de résonance positive i.e au nombre de multi-entiers $k \in \mathbb{N}^n$ indépendant tels que $\langle k, \lambda\rangle = \sum_{j=1}^{n} k_j\lambda_j = 0$. On a le lemme :

Lemme 4.2.11. *Un champ de vecteurs X est totalement nihilent si et seulement si pour toute forme prénormale X_{pran}, on a $X_{pran}.x^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ tel que $\langle k, \lambda\rangle = 0$.*

On trouvera la démonstration dans [11].
Nous sommes dans $\mathbb{C}^2$ et le spectre du champ est $\lambda = (-i, i)$, ainsi le degré de résonance positive est 1. Il nous suffit d'une unique intégrale première pour obtenir le résultat du lemme.

Théorème 4.2.12 (Caractérisation algébrique des centres)**.** *Soit la forme normale de Poincaré -Dulac (4.4).*
Le système est un centre si et seulement si $Re(Ak) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. Soit $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\langle k, \lambda\rangle = 0$ alors $k_1 = k_2$. On note $k = (l, l)$. De plus $2l \geq 1$.
Supposons que le système (4.4) est un centre alors il possède une intégrale première, il est donc totalement nihilent et par le lemme précédent on a que pour toute forme prénormale $X_{pran}.(z\bar{z})^l = 0$.
Comme la forme normale de Poincaré-Dulac est une forme prénormale, on a

$$\begin{aligned} X.(z\bar{z})^l &= X_{lin}.(z\bar{z})^l + X_r.(z\bar{z})^l \\ &= \sum_{k\geq 1}(A_k + \bar{A}_k)l(z\bar{z})^l \\ &= \sum_{k\geq 1}(2Re(A_k))l(z\bar{z})^l \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $l \neq 0$ on a nécessairement $Re(A_k) = 0$ pour tout $k \geq 1$

Supposons que $Re(A_k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. On note b_k la partie imaginaire de A_k. Alors le champ

(4.4) s'écrit

$$X = (-iz + \sum_{k\geq 1} ib_k |z|^{2k} z)\partial_z + (-i\bar{z} - \sum_{k\geq 1} ib_k |z|^{2k}\bar{z})\partial_{\bar{z}}.$$

Maintenant soit f une fonction de la forme

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{n\geq 0} f_n |z|^{2n}$$

avec $f_n \in \mathbb{C}$. Alors en calculant la dérivée de f en t sur une solution de (4.4), on a :

$$\begin{aligned}\dot{f}\ (z(t),\bar{z}(t)) &= \partial_z f.\ \dot{z} + \partial_{\bar{z}} f.\ \dot{\bar{z}} \\ &= (\sum_{n\geq 0} f_n n z^{n-1}\bar{z}^n)(iz + \sum_{k\geq 1} ib_k |z|^{2k} z) \\ &+ (\sum_{n\geq 0} f_n n z^n \bar{z}^{n-1})(-i\bar{z} - \sum_{k\geq 1} ib_k |z|^{2k}\bar{z}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

La fonction f est donc une intégrale première, le système (4.4) est donc un centre. □

4.2.4 Nature des coefficients de la forme normale de Poincaré-Dulac

Théorème 4.2.13. *Les coefficients A_n de la forme normale de Poincaré-Dulac dépendent algébriquement des coefficients de R, autrement dit ceux sont des polynômes en les coefficients de R.*

Démonstration. La démonstration repose sur l'algorithme de mise sous forme normale de Poincaré-Dulac.
Prenons un champ de vecteurs $X = X_{lin} + \sum_{k\geq 2} H_k$ où les H_k sont homogène de degré k.
On fait un changement de variables de la forme $y = x + h_2(x)$ où $h_2(x)$ est un polynôme homogène qui va annuler les termes non résonnants. C'est un changement de variables algébrique. Après cette première étape on récupère alors

$$X = X_{lin} + Res_2 + \widetilde{H}_3 + ...$$

où Res_2 regroupe les termes résonants de degré 2. On réitère alors le processus en posant $z = y + h_3(y)$ où $h_3(y)$ est un polynôme homogène de degré 3. On réitère l'opération une infinité de fois pour obtenir la forme normale de Poincaré-Dulac.
Pour un ordre donné, les coefficients sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ par rapport aux coefficients de R dans la nouvelle équation. Ces coefficients se stabilisent sous l'effet de l'algorithme, en effet à un ordre N, l'algorithme va annuler les termes non résonants d'ordre N sans modifier les termes de degré inférieur. On ne rajoute pas indéfiniment des termes dans les coefficients de la forme normale et reste algébrique sur $\mathbb{Q}$. □

Nous allons maintenant introduire la variété du centre, mais d'abord quelques notations.
Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes de la forme $P(z,\bar{z}) = \sum_{(n,m)\in I} a_{n,m} z^n \bar{z}^m$ avec $a_{n,m} \in \mathbb{C}$ où I est un

ensemble de couple (n, m) fixé. Notons i le cardinal de I. On met en bijection $\mathcal{R}$ et le sous-ensemble de $\mathbb{C}^i$ des coefficients $\{a_{n,m}, (n, m) \in I\}$ par l'application qui à un élément a de $\mathbb{C}^i$ associe le polynôme correspondant.
On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}^i$ tel que pour tout $a \in \mathcal{C}$, le système associé au polynôme correspondant P_a soit un centre.

Théorème 4.2.14 (Variété du centre)**.** *L'ensemble des centres $\mathcal{C}$ est une variété algébrique de $\mathbb{C}^{2i}$.*

Démonstration. La forme normale de Poincaré-Dulac nous donne une infinité d'équations algébriques $Re(A_k) = 0$ pour $k \geq 1$. Ces coefficients sont algébriques s'ils sont vus dans l'espace des coefficients $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ où l'on prend en compte les coefficients de P et de $\bar{P}$. Un théorème de Hilbert nous permet d'affirmer qu'il suffit d'un nombre fini d'équations pour définir cet ensemble. □

4.3 Calcul moulien et problème du centre

Le texte suivant repose sur les documents suivant [7], [8] et [22].

4.3.1 Rappels sur les champs de vecteurs

Nous allons voir comment décomposer un champ de vecteurs en la somme de sa partie linéaire et une somme d'opérateurs différentiels homogènes. Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et ν un entier strictement positif.

On se donne un champ de vecteurs X de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\partial_{x_i} \tag{4.7}$$

où $X_i(x)$ est une série formelle en $x = (x_1, ..., x_\nu)$, de plus on supposera les champs étudiés locaux i.e $X_i(0) = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., \nu\}$. On notera X_{lin} la partie linéaire de X que l'on supposera diagonale sans perte de généralité (voir [21]), et on la définit par :

$$X_{lin} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i}$$

avec $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_\nu)$ le *spectre* de X_{lin}.

Introduisons maintenant les opérateurs différentiels homogènes.

Définition 4.3.1. *Un opérateur différentiel est un élément de $\mathbb{K}\langle\langle x\rangle\rangle[\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_\nu}]$, autrement dit c'est un polynôme en les variables $\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_\nu}$ dont les coefficients sont des séries formelles en $x \in \mathbb{K}^\nu$.*
Un opérateur différentiel B est dit homogène de degré $\underline{n}$, avec $\underline{n} = (n_1, ..., n_\nu)$ où les n_i sont tous positifs sauf au plus un qui vaut -1, s'il existe $c_{\underline{n},\underline{m}} \in \mathbb{K}$ tel que :

$$B_{\underline{n}}(x^m) = c_{\underline{n},\underline{m}} x^{\underline{n}+\underline{m}}$$

où $\underline{m} \in \mathbb{K}^\nu$.

On peut décomposer un champ de vecteurs X de la forme (4.7) en une somme d'opérateurs homogènes et de sa partie linéaire.
On pose $X_i(x) = \sum\limits_{\underline{m}\in\mathbb{N}^\nu} \beta_{i,\underline{m}} x^{\underline{m}}$ avec $\beta_{i,\underline{m}} \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\underline{m}\in\mathbb{N}^\nu} \beta_{i,\underline{m}} x^{\underline{m}} \partial_{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\underline{m}\in\mathbb{N}^\nu} \beta_{i,\underline{m}} x^{\underline{m}^{<i}} x_i \partial_{x_i}, \end{aligned}$$

où $\underline{m}^{<i} = (m_1, ..., m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, ..., m_\nu)$, c'est le degré de l'opérateur $x_i\partial_{x_i}$.Ce degré est un $\nu - uplet$ dont au plus une composante vaut -1 et le reste sont des entiers positifs ou nuls. On réécrit alors X sous la forme

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{\underline{m}\in\mathbb{N}^\nu \\ \underline{m}^{<i}=n}} \beta_{i,\underline{m}} x^{\underline{m}^{<i}} x_i \partial_{x_i} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^\nu} x^n \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{\substack{\underline{m}\in\mathbb{N}^\nu \\ \underline{m}^{<i}=n}} \beta_{i,\underline{m}} \right) x_i \partial_{x_i} \end{aligned}$$

On note alors β_i^n la somme $\sum\limits_{\substack{\underline{m}\in\mathbb{N}^\nu \\ \underline{m}^{<i}=n}} \beta_{i,\underline{m}}$, c'est une somme finie car elle contient au plus un terme (car il n'y a qu'un seul $\underline{m}^{<i} = n$).
En particulier X_{lin} correspond au $\nu - uplet$ $n = (0, ..., 0)$.

On notera A(X) l'alphabet associé à la décomposition, c'est l'ensemble des lettres n apparaissant dans la décomposition en opérateurs différentiels homogène du champ X. On illustre cette démarche sur l'exemple classique suivant :

Exemple 4.3.2. *On définit un champ polynomial complexe dont la partie non linéaire est quadratique par :*

$$X = (iz + a_{20}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2)\partial_z + (-i\bar{z} + b_{20}z^2 + b_{11}z\bar{z} + b_{02}\bar{z}^2)\partial_{\bar{z}}.$$

On a $X_{lin} = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$ *dont les opérateurs sont homogènes de degré 0 et les opérateurs homogènes suivants :*

$$\begin{aligned} B_{(1,0)} &= z(a_{20}z\partial_z + b_{11}\bar{z}\partial_{\bar{z}}) \ , \\ B_{(0,1)} &= \bar{z}(a_{11}z\partial_z + b_{02}\bar{z}\partial_{\bar{z}}) \ , \\ B_{(2,-1)} &= b_{20}z^2\partial_{\bar{z}} \ , \\ B_{(-1,2)} &= a_{02}\bar{z}^2\partial_z \end{aligned}$$

qui sont tous de degré 1. On écrit alors

$$X = X_{lin} + B_{(1,0)} + B_{(0,1)} + B_{(2,-1)} + B_{(-1,2)}.$$

L'alphabet associé au champ X est alors :

$$A(X) = \{(1,0), (0,1), (2,-1), (-1,2)\}.$$

Dans le cadre des opérateurs différentiels homogènes, la concaténation de deux lettres $\omega = \omega_1\omega_2$ se traduit par la composition des opérateurs, c'est-à-dire : $B_\omega = B_{\omega_1} \circ B_{\omega_2}$, dont le degré est $|\omega| = \omega_1 + \omega_2$. Si on note $B_\bullet$ un opérateur différentiel homogène quelconque apparaissant dans la décomposition d'un champ X alors on peut écrire le champ sous forme dite préparée :

$$X = X_{lin} + \sum_{n \in A} B_n.$$

4.3.2 Compléments sur les algèbres de Lie libres et la combinatoire des mots

Algèbres de Lie libre

On rappelle que l'on note $\mathcal{L}_\mathcal{X}$ l'algèbre de Lie libre construite à partir d'un ensemble fini $\mathcal{X}$ Notons $Ass_\mathcal{X}$ l'algèbre des "polynômes associatifs mais non commutatifs", cette algèbre est en fait obtenue de la manière suivante :
On considère $E = \mathbb{K}^\mathcal{X}$ le $\mathbb{K}$-module libre de base $\mathcal{X}$, $Ass_\mathcal{X}$ est l'algèbre associative libre sur $\mathcal{X}$, c'est l'algèbre tensorielle de X.

Les algèbres $Ass_\mathcal{X}$ et $U\mathcal{L}_\mathcal{X}$, l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{L}_\mathcal{X}$, sont isomorphes.

On considère $\mathcal{X}$ un ensemble fini, donc de la forme $\{X_1, ..., X_n\}$. On définit pour tout entier $r \geq 1$ l'ensemble Ω^* l'ensemble des suites $\omega = (\omega_1, ..., \omega_r]$ avec $\omega_i \in \{1, ..., r\}$ où $1 \leq i \leq r$. Pour un r fixé, on pose $\Omega^{*,r}$ l'ensemble des suites de Ω^* de longueur r.
On peut alors associer à une suite $\omega = (\omega_1, ..., \omega_r)$ un élément de $Ass_\mathcal{X}$, c'est un mot de la forme $X_\omega := X_{\omega_1} ... X_{\omega_n}$. Un élément m de $Ass_\mathcal{X}$ est de la forme

$$m = \sum_{\omega \in \Omega^*} M^\omega X_\omega$$

où presque tous les $M^\omega \in \mathbb{K}$ sont nuls.

Une graduation naturelle pour $\mathcal{L}_\mathcal{X}$ et $Ass_\mathcal{X}$ est celle donnée par la longueur des crochets et des mots.
On définit donc $\mathcal{L}^n_\mathcal{X}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de crochets homogènes de longueur n et $Ass^n_\mathcal{X}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de mots homogènes de longueur n.
On a alors

$$\mathcal{L}_\mathcal{X} = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{L}^n_\mathcal{X} \quad et \quad Ass_\mathcal{X} = \bigoplus_{r=0}^{\infty} Ass^n_\mathcal{X}.$$

On définit maintenant les complétés pour les graduations données par

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathcal{X}} = \prod_{r=0}^{\infty} \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^{n} \quad et \quad \widehat{Ass}_{\mathcal{X}} = \prod_{r=0}^{\infty} Ass_{\mathcal{X}}^{n}.$$

Un élément m du complété $\widehat{Ass}_{\mathcal{X}}$ sont représentés par une série formelle de la manière suivante

$$m = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in \Omega^{*,r}} M^{\omega} X_{\omega} \right),$$

où $Y_r \in Ass_{\mathcal{X}}^{r}$, on utilisera plutôt la notation condensée pour désigner un élément m de ce complété

$$m = \sum_{\bullet} M^{\bullet} X_{\bullet}.$$

Alors m est entièrement déterminé par ses coefficients $M^{\bullet}$.

On a une injection naturelle de $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ dans $U\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$, qui est isomorphe à $Ass_{\mathcal{X}}$ donc on a une inclusion de $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ dans $Ass_{\mathcal{X}}$ donné par le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{X}} &\hookrightarrow Ass_{\mathcal{X}} \\ X_i &\mapsto X_i \\ [X_i, X_j] &\mapsto X_i X_j - X_j X_i. \end{aligned}$$

On rappelle que le produit direct d'algèbres de Lie est une algèbre de Lie.
On définit l'homomorphisme diagonal d'algèbres de Lie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{X}} &\to \mathcal{L}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{X}} \\ x &\mapsto (x, x). \end{aligned}$$

L'isomorphisme

$$U(\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{X}}) \simeq U\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \otimes U\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$$

qui est donné par

$$(x, y) \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes y$$

permet de définir l'homomorphisme suivant appelé coproduit induit par l'homomorphisme diagonal :

$$\begin{aligned} \Delta : U\mathcal{L}_{\mathcal{X}} &\to U\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \times U\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \\ x &\mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x. \end{aligned}$$

Ce coproduit s'étend alors à $Ass_{\mathcal{X}}$ car $U\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \simeq Ass_{\mathcal{X}}$. Nous allons énoncer un théorème important qui permet de caractériser les élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ dans $Ass_{\mathcal{X}}$

Théorème 4.3.3. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini et $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ algèbre de Lie libre sur $\mathcal{X}$, alors $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ coïncide avec l'ensemble des éléments primitifs de $Ass_{\mathcal{X}}$, autrement dit*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}} = \{m \in Ass_{\mathcal{X}}, \Delta m = m \otimes 1 + 1 \otimes m\}.$$

On renvoie à [29] pour la démonstration.
Soit $\mathcal{M}$ l'idéal de $Ass_{\mathcal{X}}$ engendré par $\mathcal{X}$, c'est donc l'idéal de tous les polynômes sans les termes constants engendré par les monômes autres que 1, qui sont non commutatifs.
On définit l'application

$$\Psi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}_{\mathcal{X}}$$

par

$$\Psi(X_{\omega_1}, ..., X_{\omega_r}) = \frac{1}{r}[[...[X_{\omega_1}, X_{\omega_2}], X_{\omega_3}]..., X_{\omega_{r-1}}], X_{\omega_r}]$$

sur les monômes et on l'étend pas linéarité à tout l'idéal $\mathcal{M}$.

On remarque que $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \subset Ass_{\mathcal{X}}$ mais aussi $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{M}$ ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 (Théorème de projection)**.** *L'application Ψ est une rétraction de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$, autrement dit $\Psi|_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}} = id_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}}$.*

Nous allons définir deux applications : l'exponentielle et le logarithme.
Soit $\widehat{\mathcal{M}} \subset \widehat{Ass_{\mathcal{X}}}$ l'idéal engendré par $\mathcal{X}$, c'est l'idéal des séries formelles sans terme constant. On a :

$$exp : \widehat{\mathcal{M}} \to 1 + \widehat{\mathcal{M}}, \quad log : 1 + \widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}$$

telles que

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

On définit aussi le produit tensoriel complété

$$\widehat{Ass_{\mathcal{X}}} \hat{\otimes} \widehat{Ass_{\mathcal{X}}} = \prod_{p,q} Ass_{\mathcal{X}}^p \otimes Ass_{\mathcal{X}}^q,$$

de plus on étend le coproduit et le résultat qui identifie $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ à l'ensemble des éléments primitifs de $Ass_{\mathcal{X}}$ au complété, nous permettant d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.3.5. *L'ensemble des éléments primitifs x de $\mathcal{M}$ donc de la forme $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ est en bijection par l'application exponentielle avec les éléments group-like y de $1 + \mathcal{M}$ de la forme $\Delta(y) = y \otimes y$.*

Combinatoire des mots

Avant d'introduire les moules on va introduire quelques notions de combinatoire sur les mots. Soit un ensemble $A = \omega_1, \omega_2, ...$ que l'on appellera alphabet, ses éléments sont des lettres. On construit

alors l'ensemble A^* comme l'ensemble des mots sur l'alphabet A, pour un élément $\underline{\omega}$ de A^* et on définit sa longueur $l(\underline{\omega})$ comme l'unique entier naturel r tel que $\underline{\omega} = \omega_1 ... \omega_r$ où tous les ω_i sont différents du mot vide que l'on note $\underline{\emptyset}$, l'unique mot de longueur nulle.
On peut décomposer A^* en sous espace par la longueur des mots en posant $A^* = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A_r^*$ où A_r^* est l'ensemble des mots de longueurs r.

On peut munir A^* de l'opération naturelle de concaténation des mots que l'on notera $\underline{\omega_1} \cdot \underline{\omega_2}$ ou $\underline{\omega_1 \omega_2}$. Deux autres opérations sur les mots sont le produit mélange (ou battage) que l'on notera sh ou $\sqcup\!\sqcup$ et le mélange contractant noté csh.

Définition 4.3.6. *Le produit de mélange est l'ensemble de tous les mots construits en mélangeant les lettres de deux mots tout en respectant l'ordre interne des lettres.*

Exemple 4.3.7. *Illustrons sur un exemple, on prend deux mots $\underline{\omega} = \omega_1 \omega_2$ et $\underline{\beta} = \beta_1 \beta_2$, alors le produit de mélange est :*

$$sh(\underline{\omega}, \underline{\beta}) = \{\omega_1\omega_2\beta_1\beta_2, \omega_1\beta_1\omega_2\beta_2, \omega_1\beta_1\beta_2\omega_2, \beta_1\omega_1\omega_2\beta_2, \beta_1\omega_1\beta_2\omega_2, \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\} \tag{4.8}$$

Définition 4.3.8. *Le battage contractant $csh(\underline{\omega^1}, \underline{\omega^2})$ est l'ensemble des mots obtenus par battage suivi d'une éventuelle contraction :*

$$(\omega_{s_i^1}, \omega_{s_j^2}) \mapsto \omega_{s_i^1 + s_j^2} \tag{4.9}$$

d'une ou plusieurs paires de lettres $(\omega_{s_i^1}, \omega_{s_j^2})$ d'éléments consécutifs provenant de $\underline{\omega^1}$ et $\underline{\omega^2}$.

Plus simplement , le battage contractant revient à noter deux lettres consécutives en une nouvelle lettre.

Si on munit A d'une structure de semi-groupe par l'opération notée $+$ alors on peut définir pour un élément $\underline{\omega} = \omega_1 ... \omega_n$ de A^* la lettre $||\underline{\omega}|| = \omega_1 + ... + \omega_n$.

4.3.3 Le calcul moulien

Nous allons donner les principales propriétés des moules qui nous permettront d'exprimer sous une autre forme le problème de linéarisation, cet outil a notamment l'intérêt de faire apparaître des propriétés universelles sur la linéarisation.

On désignera par $\mathbb{K}$ un anneau, A un alphabet et A^* l'ensemble des mots construits sur A.

Définition des moules et séries génératrices

Définition 4.3.9. *Un moule $M^\bullet$ est une application de A^* dans $\mathbb{K}$*

On notera $M^{\underline{\omega}}$ l'évaluation du moule en le mot $\underline{\omega} \in A^*$, et on note $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des moules sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$. On introduit aussi les comoules par :

Définition 4.3.10. *Soit L une algèbre sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Soit $\mathcal{B}$ une algèbre d'opérateurs sur L, non commutatifs munie de la composition usuelle. On appelle comoule une application*

B de A^* dans $\mathcal{B}$. On note :

$$A^* \xrightarrow{B} \mathcal{B}$$
$$\omega \mapsto B_\omega = B_{\omega_n} ... B_{\omega_1}$$

où $\underline{\omega} = \omega_1 ... \omega_n$.

On notera $B_\bullet$ un comoule.

Nous allons maintenant parler de la correspondance entre les moules et les séries formelles non commutatives.
On définit l'espace $\mathbb{K}\langle A\rangle$ des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbb{K}$ d'éléments de A^*, c'est-à-dire les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de variables les éléments de A^*. Cet espace est naturellement gradué par la longueur des mots de A^*, ainsi :

$$\mathbb{K}\langle A\rangle = \bigoplus_{r=0}^{+\infty} \mathbb{K}_r\langle A\rangle$$

avec $\mathbb{K}_r\langle A\rangle$ l'ensemble des polynômes en les mots de A^* de longueur r.
On définit le complété de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ par :

$$K\langle\langle A\rangle\rangle = \prod_{r=0}^{+\infty} \mathbb{K}_r\langle A\rangle$$

dont les éléments sont de la forme :

$$\sum_{\underline{\omega}\in A^*} M^{\underline{\omega}}\underline{\omega} = \sum_{r\in\mathbb{N}} (\sum_{\underline{\omega}\in A_r^*} M^{\underline{\omega}}\underline{\omega}).$$

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ est l'algèbre des séries formelles non commutatives à coefficients dans $\mathbb{K}$.
A l'inverse, pour un moule $M^\bullet$, on définit sa série génératrice Φ_M, qui est un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$, par :

$$\Phi_M = \sum_{\underline{\omega}\in A^*} M^{\underline{\omega}}\underline{\omega}.$$

On notera s'il n'y pas d'ambiguïté cette série $\sum_\bullet M^\bullet \bullet$.
On a donc le théorème :

Théorème 4.3.11. *On a une bijection entre $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A)$ et $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ par l'application :*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A) \to \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$$
$$M^\bullet \mapsto \Phi_M$$

Structure et opérations sur les moules

Les opérations sur les moules sont permises par la bijection avec les séries formelles non commutatives. On peut définir l'addition et la multiplication de moules par :

Définition 4.3.12. *L'addition de moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ est le moule $M^\bullet + N^\bullet$ donnée par :*

$$(M^\bullet + N^\bullet)^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}} + N^{\underline{\omega}}.$$

L'élément neutre de l'addition est le moule nul $O^\bullet$ qui est nul pour tout élément de A^*.

Définition 4.3.13. *Le produit des deux moules est le moule $M^\bullet \times N^\bullet$ défini par :*

$$(M^\bullet \times N^\bullet)^{\underline{\omega}} = \sum_{\omega_1 \cdot \omega_2 = \underline{\omega}} M^{\omega_1} N^{\omega_2}.$$

où la somme est sur l'ensemble des partitions du mot $\underline{\omega}$ en deux mots ω_1 et ω_2.

Le produit de moules n'est pas une opération commutative par contre elle est associative. Son élément neutre est le moule $1^\bullet$ défini par :

$$1^{\underline{\omega}} = \begin{cases} 1 & si\ \omega = \emptyset \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On peut donc définir l'inverse d'un moule, on renvoie à [22] pour la preuve de la proposition suivante :

Proposition 4.3.14. *Un moule $M^\bullet$ est inversible pour la multiplication si et seulement si $M^\emptyset$ est inversible dans $\mathbb{K}$.*

On note $S^\bullet$ l'inverse d'un moule $M^\bullet$ alors $S^\bullet$ évalué en le mot $\underline{\omega}$ est donné pour un mot $\underline{\omega} = \omega_1 ... \omega_r$ de longueur r par :

$$S^{\underline{\omega}} = \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^k}{(M^\emptyset)^{1+k}} \sum_{\omega_1 ... \omega_k \overset{*}{=} \underline{\omega}} M^{\omega_1} ... M^{\omega_r}$$

avec $\omega_1 ... \omega_r \overset{*}{=} \underline{\omega}$ l'ensemble des partitions en k mots de $\underline{\omega}$ avec $\omega_i \neq \emptyset$.

Si notre alphabet A est muni d'une structure semi-groupe on peut alors définir la composition de moules par :

Définition 4.3.15. *Soit $(A, +)$ un alphabet muni d'une structure de semi-groupe. Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux moules éléments de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A)$. Pour les mots de A on définit la composition $M^\bullet \circ N^\bullet$ par :*
i) $(M^\bullet \circ N^\bullet)^\emptyset = M^\emptyset$;
ii) Pour un mot $\underline{\omega}$ de longueur au moins 1 :

$$(M^\bullet \circ N^\bullet)^{\underline{\omega}} = \sum_{k=1}^{l(\underline{\omega})} \sum_{\omega_1 \omega_k \overset{*}{=} \underline{\omega}} M^{||\omega_1||...||\omega_k||} N^{\omega_1} ... N^{\omega_k}.$$

L'élément neutre pour la composition est le moule $I^\bullet$ défini par :

$$1^{\underline{\omega}} = \begin{cases} 1 & si\ \mathrm{l}(\underline{\omega}) = 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On a finalement :

Proposition 4.3.16. *Le quintuplet* $(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A), +, \cdot, \times, \circ)$ *est une algèbre à composition et vérifie donc la relation :*

$$\forall M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet, (M^\bullet \times N^\bullet) \circ P^\bullet = (M^\bullet \circ P^\bullet) \times (N^\bullet \circ P^\bullet).$$

Symétries des moules

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés particulières de symétrie des moules .

Définition 4.3.17. *Un moule* $M^\bullet$ *est alternal si*

$$\sum_{\underline{\omega} \in sh(\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2)} M^{\underline{\omega}} = 0 \ \forall \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2 \in A^* \setminus \{1\}.$$

Définition 4.3.18. *Un moule* $M^\bullet$ *est symetral si*

$$\sum_{\underline{\omega} \in sh(\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2)} M^{\underline{\omega}} = M^{\underline{\omega}^1} M^{\underline{\omega}^2} \ \forall \underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2 \in A^*.$$

Le moule exponentiel

On notera $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle^*$ l'ensemble des séries formelles sur A sans terme constant. Soit $\beta \in \mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle^*$, on définit son exponentiel par

$$exp(\beta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\beta^n}{n!}$$

qui est un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A \rangle\rangle$.

Définition 4.3.19. *Soit* $M^\bullet$ *un moule de* $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A)$*, le moule exponentiel est défini comme l'unique moule* $ExpM^\bullet$ *tel que*

$$exp\left(\sum_{\underline{\omega} \in A^*} M^{\underline{\omega}} \underline{\omega}\right) = \sum_{\underline{\omega} \in A^*} ExpM^{\underline{\omega}} \underline{\omega}.$$

Bigèbre et moules

Nous introduisons deux nouvelles structures algébriques qui vont nous permettre ensuite de caractériser les champs de vecteurs mais aussi les automorphismes sur les séries formelles.
On désigne par $\mathbb{K}$ un corps.

Définition 4.3.20. *Une cogèbre sur* $\mathbb{K}$ *est un triplet* (E, Δ, ε) *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ,* Δ *est une application* $\mathbb{K}$*-linéaire de* E *dans* $E \otimes_{\mathbb{K}} E$ *appelée coproduit et* ε *une application* $\mathbb{K}$*-linéaire appelé counité, tels que les diagrammes suivant commutent :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[d, "id_E \otimes \Delta"] \\ E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[r, "\Delta \otimes id_E"'] & E \otimes_{\mathbb{K}} E \otimes_{\mathbb{K}} E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[d, "id_E \otimes \varepsilon"] \\ E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[r, "\varepsilon \otimes id_E"'] & E \end{tikzcd}$$

en rappelant que $E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} E \simeq E$.

Définition 4.3.21. *Une algèbre est un triplet* (E, μ, η) *où* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\mu : E \otimes_{\mathbb{K}} E \to E$ *et* $\eta : \mathbb{K} \to E$ *sont des applications* $\mathbb{K}$*-linéaires telles que les diagrammes suivant commutent :*

$$\begin{tikzcd} E \otimes_{\mathbb{K}} E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[d, "\mu"] \\ E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[r, "\mu"'] & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes E \arrow[r, "1\otimes\eta"] \arrow[d, "\eta\otimes 1"'] & E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[d, "\mu"] \\ E \otimes_{\mathbb{K}} E \arrow[r, "\mu"'] & E \end{tikzcd}$$

Définition 4.3.22. *Une bigèbre est un quintuplet* $(E, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *tel que :*
1) (E, μ, η) *est une algèbre,*
2)(E, Δ, ε) *est une cogèbre,*
3) Δ *et* ε *sont des homomorphismes d'algèbres.*

Une bigèbre est graduée si l'algèbre sous-jacente est graduée.

Définition 4.3.23. *Un élément* x *d'une bigèbre munie d'un coproduit noté* Δ *est dit primitif si*

$$\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

et group-like si

$$\Delta x = x \otimes x.$$

On rappelle l'inclusion de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(A)$ l'algèbre de Lie libre sur A dans son algèbre enveloppante universelle $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. On munit alors $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ d'une structure de bigèbre grâce au coproduit $\Delta : \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle \otimes \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ définie sur les lettres ω de A par $\Delta\omega = \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega$ qui vérifie $\Delta 1 = 1 \otimes 1$ étendue par linéarité à tout $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$. L'application counité ε associe à un élément de $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ son élément constant. Si A est muni d'une structure de semi-groupe on a un modification du coproduit qui devient

$$\Delta(x_r) = \sum_{i+j=r} x_i \otimes x_j.$$

Le reste est identique.

On adapte alors à $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ les définitions d'éléments primitifs et group-like.
On peut démontrer (voir[7]) en particulier que le lemme suivant :

Lemme 4.3.24. *Soit* $P \in \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$*, on écrit* P *sous la forme* $\sum\limits_{\underline{\omega}\in A^*} P^{\underline{\omega}}\underline{\omega}$.
Alors P *est primitif si et seulement si le moule associé* $P^\bullet$ *est alternal ,*
P *est group-like si et seulement si le moule* $P^\bullet$ *est symétral .*

On rappelle que dans la partie précédente on a construit un application $\Psi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ où $\mathcal{M}$ était l'idéal engendré par l'ensemble fini $\mathcal{X}$ de $Ass_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ l'algèbre de Lie libre sur $\mathcal{X}$. On adapte alors en posant $\Psi : \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle^* \to \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(A)$ qui vérifie le lemme de projection mais nous permet aussi d'écrire pour un élément $P \in \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ la forme suivante

$$P = \sum_{\underline{\omega}\in A^*} P^{\underline{\omega}}\underline{\omega} = \sum_{\underline{\omega}\in A^*} P^{\underline{\omega}}\Psi(\underline{\omega}) = \sum_{r\geq 1}\frac{1}{r}\sum_{\substack{\underline{\omega}\in A^* \\ l(\underline{\omega})=r}} P^{\underline{\omega}}[[...., [\omega_1, \omega_2], \omega_3], ...], \omega_r].$$

Écriture moulienne d'un champ de vecteurs et symétrie

Nous avons vu qu'un champs de vecteurs X peut s'écrire en une somme d'opérateurs différentiels homogènes et que l'on associe alors un alphabet en écrivant

$$X = X_{lin} + \sum_{n\in A(X)} B_n$$

où X_{lin} est la partie linéaire, $A(X)$ est l'alphabet associé au champ. On généralise dans la suite en notant

$$X = X_{lin} + \sum_{\underline{n}\in A(X)^*} I^{\underline{n}} B_{\underline{n}}$$

où $A(X)^*$ est l'ensemble des mots formés sur $A(X)$ et $I^\bullet$ est le moule neutre pour la composition. Nous utiliserons dans la suite la notation allégée

$$X = X_{lin} + \sum_{\bullet} I^\bullet B_\bullet.$$

Un champ de vecteurs est une dérivation, on se demande quand un élément $P = \sum_{\underline{\omega}}^{*} P^{\underline{\omega}} B_{\underline{\omega}}$ est une dérivation. Le symbole $\sum^*$ signifie la somme sur les décompositions du mot $\underline{\omega}$ et les $B_\bullet$ sont des dérivations.

Lemme 4.3.25. *Pour que P soit une dérivation il faut que le moule associé $P^\bullet$ soit alternal, en particulier tout moule d'un champ de vecteur est alternal.*

Démonstration. Pour que P soit une dérivation il doit vérifier la règle de Leibniz, puisqu'on est dans la bigèbre $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$, on va caractériser la dérivation en utilisant le coproduit, il faut donc que $\Delta(P) = P\otimes 1 + 1\otimes P$. La règle de Leibniz est donnée pour tous $x, y \in \mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ par :

$$\Delta(P)(x\otimes y) = (P\otimes 1 + 1\otimes P)(x\otimes y) = Px\otimes y + x\otimes Py.$$

On note la propriété suivante du coproduit Δ :
Soit $P = (P_1, ..., P_n)$ alors $\Delta(P) = P\otimes 1 + 1\otimes P + \sum_{(P^1,P^2)\in C_P^*} P^1\otimes P^2$

où C_P^* est l'ensemble des couples $(P^1\otimes P^2)$ apparaissant dans la décomposition de $\Delta(P)$ excepté $P\otimes 1$ et $1\otimes P$. On peut montrer que $(P^1, P^2)\in C_P$ si et seulement si $P\in sh(P^1, P^2)$.
Donc P est une dérivation si et seulement si $\sum_{(P^1,P^2)\in C_P^*} P^1\otimes P^2 = 0$, autrement dit si P est alternal. □

4.3.4 Conjugaison de champs de vecteurs

Dans cette partie on rappelle les principales définitions de la conjugaison de champs de vecteurs et notamment le théorème de Hartman-Grobman.

Pour deux champs X et Y de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{K}^\nu$ dans $\mathbb{K}^\nu$ on note respectivement Φ et Ψ les flots associés, on dira que X et Y sont $\mathcal{C}^j-$*équivalents* s'il existe $j \leq k$ et un $\mathcal{C}^j - diff\acute{e}omorphismes$ qui envoient les orbites de Φ en les orbites de Ψ en préservant l'orientation, si ce difféomorphisme préserve en plus la paramétrisation en temps on dira que les dynamiques de X et Y sont $\mathcal{C}^j - conjugu\acute{e}es$. Notons h ce difféomorphisme alors on a :

$$h \circ \Phi(t, x) = \Psi(t, h(x)).$$

On va énoncer le théorème de Hartman-Grobman comme illustration de la conjugaison dans des cas simples, pour une démonstration de ce théorème on renvoie à [20] :

Théorème 4.3.26. *Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ et x_0 un point d'équilibre (i.e. $X(x_0) = 0$) hyperbolique (dont les valeurs propres du système linéairisé $DX(x_0)$ ont une partie réelle non nulle). Alors les flots de X et $DX(x_0)$ sont topologiquement conjugués au voisinage de x_0, c'est-à-dire $\mathcal{C}^0 - conjugu\acute{e}s$.*

Notons h un changement de variable tel que $x = h(y)$ et Θ_h l'opérateur de substitution associé à h défini sur $\mathbb{C}[[x]]$ par :

$$\begin{aligned} \Theta_h : \mathbb{C}[[x]] &\to \mathbb{C}[[x]] \\ \Phi &\mapsto \Phi \circ h \end{aligned}$$

on définit son inverse (puisque h est un difféomorphisme il est inversible) par :

$$(\Theta_h)^{-1} = \Theta_{h^{-1}}$$

Cet opérateur a la propriété suivante :

Proposition 4.3.27. *L'opérateur de substitution Θ_h est un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$.*

Définition 4.3.28. *Soient X et Y deux champs de vecteurs formelles (resp. analytique). Le champ Y est conjugué à X formellement (resp. analytiquement) s'il existe un changement de variable formel (resp. analytique) h tel que :*

$$Y = \Theta_h X \Theta_h^{-1}. \tag{4.10}$$

En particulier, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\Theta_h"'] & X.\Phi \arrow[d, "\Theta_h"] \\ \Phi \circ h \arrow[r, "Y"'] & Y.(\Phi \circ h) \end{tikzcd}$$

On notera dans la suite Θ au lieu de Θ_h pour simplifier.

Remarque 4.3.29. *Si $Y = X_{lin}$, la conjugaison est une linéarisation.*

4.3.5 Equations de conjugaison

On se donne un champ de vecteurs X de la forme $X = X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet}$, notons X_{conj} un champ de vecteurs conjugué à X par la relation (4.10), c'est-à-dire :

$$X_{conj} = \Theta X \Theta^{-1}. \tag{4.11}$$

On veut écrire ici une équation moulienne de la conjugaison. Notons que l'automorphisme de conjugaison Θ que l'on supposera formelle est un automorphisme de $\mathbb{K}\langle\langle B \rangle\rangle$ qui est l'algèbre des séries formelles non-commutatives construites sur les opérateurs B_n, il doit être de la forme :

$$\Theta = \sum_{n \in A(X)^*} \Theta^n B_n.$$

L'automorphisme Θ est un élément group-like puisqu'il doit vérifier :

$$\Theta(\varphi\psi) = \Theta(\varphi)\Theta(\psi),$$

et donc pour le coproduit on doit avoir

$$\Delta(\Theta)(\varphi \otimes \psi) = \Theta(\varphi) \otimes \Theta(\psi).$$

De plus son inverse en écriture moulienne est

$$\Theta^{-1} = \sum_{\bullet} (\Theta^{-1})^{\bullet} B_{\bullet}$$

où $(\Theta^{-1})^{\bullet}$ est le moule inverse pour la multiplication.
Enfin on notera

$$X_{conj} = X_{lin} + \sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet}$$

où $M^{\bullet}$ est un moule alternal. On peut écrire alors l'équation moulienne :

$$X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} = \left(\sum_{\bullet} (\Theta^{\bullet})^{-1} B_{\bullet}\right)\left(X_{lin} + \sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet}\right)\left(\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}\right)$$

et en développant on a :

$$X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} = \left(\sum_{\bullet} (\Theta^{\bullet})^{-1} B_{\bullet}\right)(X_{lin})\left(\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}\right) + \left(\sum_{\bullet} (\Theta^{\bullet})^{-1} B_{\bullet}\right)\left(\sum_{\bullet} M^{\bullet} B_{\bullet}\right)\left(\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}\right)$$

ou encore :

$$X_{lin} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} = \left(\sum_{\bullet}(\Theta^{\bullet})^{-1} B_{\bullet}\right)(X_{lin})\left(\sum_{\bullet}\Theta^{\bullet} B_{\bullet}\right) + \sum_{\bullet}\left((\Theta^{\bullet})^{-1} \times M^{\bullet} \times \Theta^{\bullet}\right) B_{\bullet}.$$

On va introduire maintenant deux lemmes nous permettant d'avancer le calcul . Mais d'abord rappelons que le poids d'un vecteur k de $\mathbb{Z}^{\nu}$ est défini par :

$$\omega(k) = \lambda \cdot k = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_i k_i,$$

où λ est le spectre de X_{lin}. De plus si l'on munit l'alphabet $A(X)$ d'une structure de semi-groupe on peut alors définir une "norme" de la manière suivante :
pour un mot $n = n_1 ... n_{\nu} \in A^*$ alors on définit une nouvelle lettre

$$||n|| = n_1 + ... + n_{\nu}.$$

Lemme 4.3.30. *Pour tout mot $n \in A(X)^*$, on a $[X_{lin}, B_n] = \omega(||n||)B_n$*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la longueur des mots. Prenons une lettre $n \in A(X)$, on lui associe l'opérateur homogène $B_n = x^n \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \partial_{x_j}$ et prenons $X_{lin} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \partial_{x_i}$ et calculons le crochet de B_n par X_{lin} :

$$\begin{aligned}
[X_{lin}, B_n] &= X_{lin} B_n - B_n X_{lin} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{n} \lambda_i \beta_j x_i \partial_{x_i}(x^n x_j)\partial_{x_j} - \beta_j \lambda_i x^{n>j} \partial_{x_j}(x_i)\partial_{x_i} \\
&= \sum_{i=j=1}^{n} \lambda_i \beta_i (n_i + 1) x^{n>i} \partial_{x_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ i=1}} \lambda_i \beta_j x_i n_i x^{n<i} x_j \partial_{x_j} - \sum_{i=j=1}^{n} \lambda_i \beta_i x^{n>i} \partial_{x_i} \\
&= \sum_{i=j=1}^{n} \lambda_i \beta_i n_i x^{n>i} \partial_{x_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ i=1}} \lambda_i \beta_j n_i x^{n>j} \partial_{x_j} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{n} \lambda_i \beta_j x^{n>j} \partial_{x_j} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i n_i\right)\left(x^n \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_j}\right) \\
&= \omega(||n||) B_n.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant l'égalité vérifiée pour les mots de longueur inférieur ou égale à r montrons qu'elle est encore vraie pour les mots de longueur r+1. On pose $\underline{n} = pm$ où p est un mot de longueur r et m est une lettre. On rappelle que $B_{\underline{n}} = B_p B_m$.

$$\begin{aligned}
[X_{lin}, B_{\underline{n}}] &= X_{lin} B_{\underline{n}} - B_{\underline{n}} X_{lin} \\
&= X_{lin} B_p B_m - B_p B_m X_{lin} \\
&= X_{lin} B_p B_m - B_p X_{lin} B_m + B_p X_{lin} B_m - B_p B_m X_{lin} \\
&= (X_{lin} B_p - B_p X_{lin}) + B_p (X_{lin} B_m - B_m X_{lin}) \\
&= [X_{lin}, B_p] B_m + B_p [X_{lin}, B_m] \\
&= \omega(||p||) B_p B_m + \omega(||m||) B_p B_m \\
&= (\omega(||p||) + \omega(||m||)) B_{\underline{n}} \\
&= \omega(||\underline{n}||) B_{\underline{n}}.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Lemme 4.3.31. *Soit $M^\bullet$ un moule de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(A(X))$. On a alors :*

$$X_{lin} \left(\sum_\bullet M^\bullet B_\bullet \right) = \sum_\bullet \nabla M^\bullet + \left(\sum_\bullet M^\bullet B_\bullet \right) X_{lin}$$

où $\nabla M^n = \omega(||n||) M^n$ pour tout mot n de $A(X)^*$.

Démonstration. D'après le lemme précédent pour tout $\underline{n} \in A(X)*$,on a $X_{lin} B_{\underline{n}} = \omega(||\underline{n}||) B_{\underline{n}} + B_{\underline{n}} X_{lin}$, on conclut par linéarité. □

En reprenant le calcul sur l'équation de conjugaison, on a alors :

$$X_{lin} + \sum_\bullet I^\bullet B_\bullet = \left(\sum_\bullet (\Theta^\bullet)^{-1} B_\bullet \right) \left(\sum_\bullet \nabla \Theta^\bullet B_\bullet + \left(\sum_\bullet \Theta^\bullet B_\bullet \right) X_{lin} \right) + \sum_\bullet \left((\Theta^\bullet)^{-1} \times M^\bullet \times \Theta^\bullet \right) B_\bullet.$$

En développant puis en multipliant à gauche par Θ on obtient finalement en identifiant terme à terme l'équation :

$$\Theta^\bullet \times I^\bullet = \nabla \Theta^\bullet + M^\bullet \times \Theta^\bullet. \tag{4.12}$$

On vient donc de démontrer le théorème de conjugaison suivant :

Théorème 4.3.32. *L'équation de conjugaison des champs (4.11) est équivalente à l'équation moulienne (4.12).*

4.3.6 Linéarisation formelle et universalité

Comme nous l'avons dit en première partie de ce chapitre, montrer que le système est un centre revient à montrer qu'il est formellement linéarisable.
Le théorème de H.Poincaré nous le permet dans le cas de non-résonance :

Théorème 4.3.33 (Poincaré)**.** *Soit $X = X_{lin} + \sum_{n \in A(X)} B_n$ un champ de vecteurs sous forme préparée de partie linéaire $X_{lin} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i}$ dont le spectre est noté $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_\nu)$. Pour tout $\underline{n} = (n_1, ..., n_r) \in A(X)^*$ où $n_i \in A(X)$ on définit $\omega(\underline{n}) = (\omega_1, ..., \omega_r) \in \mathbb{C}^\nu$ tel que $\omega_i = \langle n_i, \lambda \rangle$ pour tout $i \in \{1, ..., \nu\}$*

et $||\omega(\underline{n})|| = \omega_1 + ... + \omega_r$*. On suppose que* X *est non résonnant, c'est-à-dire* $||\omega(\underline{n})|| \neq 0$ *pour tout* $\underline{s} \in A(X)^*$*.*
Alors le champ X *est formellement linéarisable.*
De plus, on a une formule explicite de l'automorphisme formel $\Theta = \sum_\bullet \Theta^\bullet B_\bullet$ *de* $\mathbb{C}\langle\langle B\rangle\rangle$ *donné par :*

$$\Theta^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)...(\omega_1+...+\omega_r)}$$

pour tout $\underline{n} = (n_1, ..., n_r) \in A(X)^*$ *avec* $n_i \in A(X)$ *et* $\omega_i = \langle n_i, \underline{\lambda}\rangle$*.*

Démonstration. Nous allons reprendre l'équation de conjugaison et la résoudre par récurrence, on a donc $X_{conj} = X_{lin}$ et l'équation de conjugaison devient

$$\Theta^\bullet \times I^\bullet = \nabla\Theta^\bullet.$$

On remarque que l'automorphisme Θ est un élément group-like de $\mathbb{C}\langle\langle B\rangle\rangle$ dont on note a le terme constant, on a donc $\Delta(\Theta) = \Theta \otimes \Theta$ de terme constante a^2. Comme Θ est group-like c'est l'image d'un élément primitif par l'application exponentiel donc une série formelle . De plus dans la décomposition $\Delta(\Theta)$ on a les termes $\underline{x} \otimes 1$ et $1 \otimes \underline{x}$, le fait d'avoir $\Delta(\Theta) = \Theta \otimes \Theta$ impose que le terme constant de Θ est non nul. On a $a^2(1\otimes 1) = a(1 \otimes 1)$ et donc $a^2 = a$ i.e $a = 1$.
On a le premier terme du moule $\Theta^\bullet$ qui est $\Theta^\emptyset = 1$. Cela vient du fait qu'on veut des transformations tangentes à l'identité donc de la forme Id + ... pour conserver la partie linéaire du champ étudié.

Soit un mot $\underline{n}$ de longueur 1, on a

$$\nabla\Theta^{\underline{n}} = \Theta^{\underline{n}} \times I^\emptyset + \Theta^\emptyset \times I^{\underline{n}}$$

comme $I^\emptyset = 0$ et $\Theta^\emptyset = 1$,

$$\nabla\Theta^{\underline{n}} = 1$$

or $\nabla\Theta^{\underline{n}} = \omega(||\underline{n}||)\Theta^{\underline{n}} = \langle\lambda, ||\underline{n}||\rangle\Theta^{\underline{n}}$ pour tout $\underline{n} \in A(X)^*$. Comme $l(\underline{n}) = 1$, on a $||\underline{n}|| = \underline{n}$. Finalement on a

$$\Theta^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega(\underline{n})}$$

pour tout $\underline{n} \in A(X)$ car $\omega(\underline{n}) \neq 0$.
Supposons que pour tous mots $(n_1, ..., n_{r-1})$ de longueur $r-1$ et tout $k \in \{1, ..., r-1\}$, on ait $\omega_1 + ...\omega_{r-1} \neq 0$ et la relation de récurrence

$$\Theta^{n_1...n_{r-1}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)...(\omega_1+...+\omega_{r-1})}.$$

D'après l'équation pour tout mot $\underline{n} = (n_1, ..., n_r)$ de longueur r on a

$$\nabla\Theta^{n_1...n_r} = \Theta^{n_1...n_r} \times I^{n_r}$$

car $I^\bullet = 0$ pour tout mot de longueur différente de 1. On a donc

$$\omega(||\underline{n}||)\Theta^{n_1...n_r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)...(\omega_1+...+\omega_{r-1})},$$

comme $\omega(||\underline{n}||) = \omega_1 + ... + \omega_r \neq 0$ (par non résonance du champ) on obtient la formule générale du moule de linéarisation

$$\Theta^{n_1...n_r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)...(\omega_1+...+\omega_r)}.$$

Vérifions que le moule de linéarisation est symétral. La preuve se fait par récurrence sur la longueur des mots.

Pour les mots $\underline{(\omega)}$ de longueur 2, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{\omega}\in sh(\omega_1,\omega_2)} \Theta^{\underline{w}} &= \Theta^{\omega_1,\omega_2} + \Theta^{\omega_2,\omega_1} \\
&= \frac{1}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)} + \frac{1}{\omega_2(\omega_1+\omega_2)} \\
&= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \\
&= \Theta^{\omega_1}\Theta^{\omega_2}.
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété de symétralité est vérifiée pour les mots de longueur $< r$. Montrons qu'elle est vraie pour les mots de longueur r. On pose $\underline{\omega} = \underline{\omega}^1\underline{\omega}^2$ où $\underline{\omega}^1 = (\omega_1^1, ..., \omega_n^1)$ de longueur n et $\underline{\omega}^2 = (\omega_1^2, ..., \omega_m^2)$ de longueur m tels que $n + m = r$.

On remarque que $\Theta^{\omega_1,...,\omega_r} = \frac{1}{||\underline{\omega}||}\Theta^{\omega_1,...,\omega_{r-1}}$ où $||\underline{\omega}|| = \omega_1 + ... + \omega_r$.

De plus on peut définir $sh(\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2)$ comme une réunion disjointe par rapport à la dernière lettre de $\underline{\omega}^1$ et celle de $\underline{\omega}^2$ en n'oubliant pas que le mélange sh conserve l'ordre interne des lettres pour chaque mot, on a alors

$$sh(\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2) = (sh(\underline{w}^1_{\leq n-1}, \underline{\omega}^2) \coprod (sh(\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2_{\leq m-1}).$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{\omega}\in sh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} \Theta^{\underline{w}} &= \frac{1}{||\underline{\omega}||}\sum_{\underline{\omega}\in sh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} \Theta^{\underline{w}_{\leq r-1}} \\
&= \frac{1}{||\underline{\omega}||}\sum_{\underline{s}\in sh(\underline{\omega}^1_{\leq n-1},\underline{\omega}^2)} \Theta^{\underline{s}} + \frac{1}{||\underline{\omega}||}\sum_{\underline{s}\in sh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2_{\leq m-1})} \Theta^{\underline{s}}
\end{aligned}$$

Et par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{\omega}\in sh(\underline{\omega}^1,\underline{\omega}^2)} \Theta^{\underline{w}} &= \frac{1}{||\underline{\omega}||}\Theta^{\underline{\omega}^1_{\leq n-1}}\Theta^{\underline{\omega}^2} + \frac{1}{||\underline{\omega}||}\Theta^{\underline{\omega}^1}\Theta^{\underline{\omega}^2_{\leq m-1}} \\ &= \frac{||\underline{\omega}^1||}{||\underline{\omega}||}\Theta^{\underline{\omega}^1}\Theta^{\underline{\omega}^2} + \frac{||\underline{\omega}^2||}{||\underline{\omega}||}\Theta^{\underline{\omega}^1}\Theta^{\underline{\omega}^2} \\ &= \Theta^{\underline{\omega}^1}\Theta^{\underline{\omega}^2},\end{aligned}$$

car $||\underline{\omega}^1|| + ||\underline{\omega}^2|| = ||\underline{\omega}||$. La symétralité est vérifiée pour les mots de longueur r, ce qui conclut la démonstration. □

Le moule de linéarisation $\Theta^\bullet$ présente l'intérêt majeur d'être universel au sens où :
i) deux champs de vecteurs de même partie linéaire et de même alphabet ont exactement le même moule de linéarisation,
ii) tous les champs de vecteurs non résonants se linéarisent via un moule dont l'expression formelle est fixe.

Le théorème suivant permet d'exprimer cette universalité :

Théorème 4.3.34 (Universalité du moule $\Theta^\bullet$)**.** *Soit* $\boldsymbol{La} = \{La_r\}_{r\geq 1}$, $r \in \mathbb{N}$ *la famille de fonctions à valeurs complexes* $La_r : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ *définies par :*

$$La_r(x_1, ..., x_r) = \frac{1}{(x_1 + ... + x_r)(x_1 + ... + x_{r-1})...x_1}$$

pour tout $(x_1, ..., x_r) \in \mathbb{C}\backslash Sa_r$*, où* Sa_r *est le lieu singulier donné par :*

$$Sa_r = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1 + x_2 = 0\} \cup ... \cup \{x_1 + ... + x_r = 0\}.$$

Si un champ de vecteurs X *possède une partie linéaire de spectre* $(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_\nu x_\nu)$ *non-résonante, alors le moule de linéarisation formelle est donné pour toute suite* $\underline{s} \in A(X)^*$ *de longueur* r *par :*

$$\Theta^{\underline{s}} = La_r(\omega_1, ..., \omega_r),$$

où $\omega_i = \langle s_i.\underline{\lambda}\rangle$ *avec* $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_\nu)$*.*

4.4 Résolubilité et centre

Le champ de vecteurs que nous allons étudier ici est sous la forme :

$$X = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + P(z,\bar{z})\partial_z + \overline{P(z,\bar{z})}\partial_{\bar{z}} \tag{4.13}$$

où $P(z,\bar{z}) = \sum_{2\leq i+j\leq n} a_{i,j} z^i \bar{z}^j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On pourra éventuellement considérer le cas où P est un polynôme homogène de degré n et dans ce cas, P est de la forme $P(z,\bar{z}) = \sum_{i+j=n} a_{i,j} z^i \bar{z}^j$.

On rappelle que l'on peut décomposer un champ de vecteurs en une somme de sa partie linéaire et une somme d'opérateurs différentiels homogènes. Nous allons ici expliciter les liens entre centre et les algèbres de Lie engendrées à partir de ces opérateurs homogènes. On note **B** l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs homogènes de la décomposition de X et $\mathbf{B}_{res}$ l'algèbre de Lie résonnante, c'est-à-dire engendrée par des crochets résonants d'opérateurs apparaissant dans le champ X.
On va expliciter des conditions sur les coefficients des opérateurs pour la linéarisation dans les cas suivants :
- l'algèbre **B** est nilpotente d'ordre 1, i.e $[\mathbf{B}, \mathbf{B}] = 0$ et les $B_{\underline{s}} = 0$ si $\omega(\underline{s}) = 0$
- l'algèbre $\mathbf{B}_{res}$ est triviale, autrement dit tous ses crochets sont nuls.

Remarque 4.4.1. *La décomposition en opérateurs homogènes fait apparaître les opérateurs suivants où $2 \leq k \leq d$ et $1 \leq i \leq k$:*

$$\begin{aligned} B_{(i-1,k-i)} &= z^{i-1}\bar{z}^{k-i}(a_{i,k-i}z\partial_z + \bar{a}_{k-i+1,i-1}\bar{z}\partial_{\bar{z}}) \\ B_{(-1,k)} &= a_{0,k}\bar{z}^k\partial_z \\ B_{(k,-1)} &= \bar{a}_{0,k}z^k\partial_{\bar{z}} \end{aligned}$$

et on a donc :

$$\mathbf{B} = \langle B_{(i-1,k-i)}, B_{(-1,k)}, B_{(k,-1)} \text{ avec } 2 \leq k \leq d \text{ et } 1 \leq i \leq k \rangle$$

et

$$\mathbf{B}_{res} = \langle [B_{(i-1,k-i)}, B_{(k-i,i-1)}], [B_{(-1,k)}, B_{(k,-1)}] \text{ avec } 2 \leq k \leq d \text{ et } 1 \leq i \leq k \rangle.$$

On introduit une notion nouvelle d'algèbre isochrone et algèbre résonante :

Définition 4.4.2. *Une algèbre résonante est une algèbre de Lie dont les éléments sont des crochets de Lie engendrés par les monômes résonants associés à un champ de vecteurs donné qui est un centre isochrone holomorphe.*
Une algèbre isochrone est une algèbre de Lie dont les éléments sont engendrés par les opérateurs différentiels homogènes associés à un champ de vecteurs donné qui est un centre isochrone holomorphe à vitesse angulaire constante $\dot{\Theta} = 1$.

On a le théorème :

Théorème 4.4.3. *L'algèbre de Lie **B** définie précédemment est une algèbre isochrone.*
L'algèbre de Lie $\mathbf{B}_{res}$ est une algèbre résonante.

La démonstration repose sur les lemmes dans les sections suivantes.

4.4.1 Linéarisation triviale et centres isochrones holomorphes

Lemme 4.4.4. *L'algèbre de Lie résonante $\mathbf{B}_{res}$ est triviale si et seulement si $a_{i,k-i} = 0$ pour $i = 0, ..., k$.*

Démonstration. Nous allons calculer les deux crochets pour obtenir les conditions. Le calcul étant identique pour tous les k, on en fixe un.
Commençons par le cas le plus simple :

$$[B_{(-1,k)}, B_{(k,-1)}] = a_{0,k}\bar{a}_{0,k}k(z\bar{z})^{k-1}(\bar{z}\partial_{\bar{z}} - z\partial_z).$$

On a donc $[B_{(-1,k)}, B_{(k,-1)}] = 0$ si et seulement si $a_{0,k} = 0$.
Le second crochet est plus long à calculer, on obtient :

$$\begin{aligned}
[B_{(i-1,k-i)}, B_{(k-i,i-1)}] &= z^k\bar{z}^{k-1}((a_{i,k-i}a_{k-i+1,i-1}(k-2i+1) \\
&\quad + \bar{a}_{k-i+1,i-1}a_{k-i+1,i-1}(i-1) - \bar{a}_{i,k-i}a_{i,k-i})\partial_z \\
&\quad + z^{k-1}\bar{z}^k(a_{i,k-i}\bar{a}_{i,k-i}(k-i) + \bar{a}_{k-i+1,i-1}a_{k-i+1,i-1}(i-1) \\
&\quad - \bar{a}_{i,k-i}\bar{a}_{k-i+1,i-1}(k-2i+1)\partial_{\bar{z}} \\
&= R_z z^k\bar{z}^{k-1}\partial_z + R_{\bar{z}}z^{k-1}\bar{z}^k\partial_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Pour que le crochet soit nul il faut que $R_z = R_{\bar{z}} = 0$ mais les conditions n'apparaissent pas directement on va donc calculer $R_z + R_{\bar{z}}$ et $R_z - R_{\bar{z}}$.
On obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
&R_z + R_{\bar{z}} = 2i \times Im(a_{i,k-i}a_{k-i+1,i-1})(k-2i+1) \\
&R_z - R_{\bar{z}} = 2(k-2i+1)Re(a_{i,k-i}a_{k-i+1,i-1} + 2(i-1)|a_{k-i+1,i-1}|^2 - 2(k-i)|a_{i,k-i}|^2.
\end{aligned}$$

On a l'équivalence :
$\mathbf{B}_{res}$ est triviale si et seulement si $\begin{cases} R_z + R_{\bar{z}} = 0 \\ R_z - R_{\bar{z}} = 0 \end{cases}$ si et seulement si $a_{i,k-i} = 0$. □

Lemme 4.4.5. *Soit X le champ de vecteurs (4.13) avec P homogène de degré n. Si $a_{i,n-i} = 0$ pour i=0,...,n alors le champs X est linéarisable.*

Démonstration. Sous l'hypothèse énoncée, on a d'après le lemme précédent que $\mathbf{B}_{res}$ est triviale alors il n'y a pas de monômes résonnants et d'après le théorème de Poincaré le champ de vecteurs X est linéarisable (formellement). □

Les conditions précédentes sont exactement celles des centres isochrones holomorphes.

4.4.2 Linéarisation nilpotente et centres isochrones à vitesse angulaire constante

Lemme 4.4.6. *L'algèbre de Lie* **B** *est nilpotente d'ordre 1 si et seulement si pour tout i=0,...,d-1, on a :*

$$a_{0,d} = 0, \tag{4.14}$$

$$ja_{j,d-j}\delta_i - ia_{i,d-i}\delta_j + d(\bar{a}_{d-i+1,i-1}a_{j,d-j} - \bar{a}_{d-j+1,j-1}a_{i,d-i}) = 0, \tag{4.15}$$

$$(j-1)\bar{a}_{d-j+1,j-1}\delta_i - (-1)\bar{a}_{d-i+1,i-1}\delta_j = 0 \tag{4.16}$$

où $\delta_i = a_{i,d-i} - \bar{a}_{d-i+1,i-1}$.

Démonstration. Il suffit de calculer tous les crochets de longueur 2 pour un degré d fixé. On a :

$$[B_{(d,-1)}, B_{(-1,d)}] = d|a_{0,d}|^2(z\bar{z})^{d-1}(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}$$

Si **B** est nilpotente d'ordre 1 alors $a_{0,d} = 0$. On récupère alors que tous les opérateurs $B_{(d,-1)}$ et $B_{(-1,d)}$ sont nuls ainsi que tous les crochets les impliquant. En particulier on a :

$$[B_{(d,-1)}, B_{i-1,d-i}] = 0 \textit{ et } [B_{(-1,d)}, B_{i-1,d-i}] = 0.$$

Il nous reste à calculer le crochet suivant :

$$[B_{i-1,d-i}, B_{j-1,d-j}].$$

Un calcul donne :

$$[B_{i-1,d-i}, B_{j-1,d-j}] = z^{i+j-1}\bar{z}^{2d-(i+j)}A_i\partial_z + z^{i+j-2}\bar{z}^{2d-(i+j)+1}B_i\partial_{\bar{z}}$$

où

$$\begin{aligned}
A_i &= ja_{j,d-j}\delta_i - ia_{i,d-i}\delta_j + d(\bar{a}_{d-i+1,i-1}a_{j,d-j} - \bar{a}_{d-j+1,j-1}a_{i,d-i}),\\
B_i &= (j-1)\bar{a}_{d-j+1,j-1}\delta_i + (1-i)\bar{a}_{d-i+1,i-1}\delta_j,
\end{aligned}$$

où

$$\delta_i = a_{i,d-i} - \bar{a}_{d-i+1,i-1}.$$

La nilpotence de **B** implique que $A_i = 0$ et $B_i = 0$ et on récupère les conditions énoncées. La réciproque est triviale. □

Lemme 4.4.7. *Soit X un champ de vecteurs de la forme (4.13) avec P homogène de degré* $n \geq 2$. *On suppose que les coefficients de P vérifient :*

$$a_{0,n} = 0 \textit{ et } a_{i,n-i} - \bar{a}_{N-i+1,i-1} = 0 \textit{ pour tout } i = 0, ..., n-1.$$

Le champ X est alors linéarisable si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :

- *n est pair*
- *n est impair, de la forme* $n = 2k+1$ *de plus* $a_{k+1,k} = 0$.

Démonstration. Les hypothèses sur les coefficients de P donnent en particulier $\delta_i = 0$ $\forall i = 0, ...n-1$, on vérifie donc les conditions du lemme précédent et l'algèbre **B** est triviale en particulier en degré n pair, tous les mots résonants sont de longueur 2 , donc $\mathbf{B}_{res} = \{0\}$ et donc X est linéarisable. Si n est

impair on récupère dans ce cas un mot de longueur 1 qui est résonant. Comme n=2k+1, le seul mot résonant de longueur 1 est $B_{k,k}$ qui est à priori non nul et on a $\mathbf{B}_{res} = \{B_{k,k}\}$.
Le champ X est donc linéarisable si et seulement $B_{k,k} = (z\bar{z})^k(a_{k+1,k}z\partial_z + \bar{a}_{k+1,k}\bar{z}\partial_{\bar{z}} = 0$ si n est impair, donc si $a_{k+1,k} = 0$. $\square$

On obtient ainsi la caractérisation des centres isochrones à vitesse angulaire constante.

Chapitre 5

Propriétés de commutation et intégrabilité

Ce chapitre va nous permettre d'établir un lien fort entre les propriétés de commutation des champs de vecteurs par le crochet de Lie et la propriété d'intégrabilité. Ce chapitre repose sur l'article de Giné et Grau [13]. En particulier dans la dernière section nous démontrons un résultat nouveau reliant l'existence de relations dépendances entre champs de vecteurs dans le module de dérivations à l'intégrabilité de ces champs . Ce résultat est un premier pas vers l'interprétation dynamique de la conjecture de Terao.

5.1 Rappels sur la linéarisation et l'intégrabilité

On rappelle qu'à une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}= f(x) \tag{5.1}$$

où $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $f = (f_1, ..., f_n)$ avec $f_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, c'est-à-dire $f_i(x)$ analytique, peut être associée à un champ de vecteurs de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\partial_{x_i}. \tag{5.2}$$

On va considérer un tel champ de vecteurs en supposant que $f_i(0) = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$, 0 est dit singulier (c'est un point d'équilibre) que l'on suppose non dégénéré , autrement dit la matrice de la partie linéaire est inversible.

On rappelle la notion de linéarisation et d'intégrabilité :

Définition 5.1.1. *Le champ de vecteurs (5.2) est linéarisable en l'origine si et seulement il existe un changement de coordonnées analytique de la forme $x = y + F(y)$, $y \in \Omega \subset \mathbb{C}^2$ où Ω est un voisinage de 0 et $F(y) = O(|y|)$ pour $y \to 0$ tel que dans le nouveau système de coordonnées le champ est linéaire.*

Dans la définition suivante on prend $n = 2$.

Définition 5.1.2. *Le champ (5.2) est intégrable dans un voisinage de l'origine si et seulement si il existe un changement de coordonnées analytique de la forme* $(u, v) = (x + o(x, y), y + o(x, y))$ *qui transforme (5.1) en*

$$\begin{cases} \dot{u} = (\alpha_1 u + \beta_1 v)h(u, v) \\ \dot{v} = (\alpha_2 u + \beta_2 v)h(u, v) \end{cases} \tag{5.3}$$

où h(u,v)=1+g(u,v) avec g(u,v)=O(u,v).

On remarque qu'une intégrale première du système homogène

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ \dot{v} = \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases} \tag{5.4}$$

est aussi une intégrale première de (5.3), en effet soit $H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une intégrale première du système (5.4), montrons que c'est une intégrale première de (5.3) en montrant que la dérivée de H en temps est nulle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(u(t), v(t)) &= \dot{u} \frac{\partial}{\partial u} H(u(t), v(t)) + \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} H(u(t), v(t)) \\ &= \left((\alpha_1 u + \beta_1 v) \frac{\partial}{\partial u} H(u(t), v(t)) + (\alpha_2 u + \beta_2 v) \frac{\partial}{\partial u} H(u(t), v(t)) \right) h(u, v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus si un système est linéarisable, il est intégrable.

On rappelle la définition du domaine de Poincaré et son théorème de linéarisation en l'absence de résonance.

Définition 5.1.3. *Soit* $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *une collection de valeurs propres. Cette collection appartient au domaine de Poincaré si son enveloppe convexe ne contient pas 0.*

Théorème 5.1.4. *Soit* $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *les valeurs propres de la matrice* A *de taille* $n \times n$. *Si ces valeurs propres sont dans le domaine de Poincaré et ne sont pas résonantes alors il existe un changement de coordonnées analytique* $x = y + F(y)$, $y \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ *une voisinage de l'origine qui transforme le système différentiel analytique* $\dot{x} = Ax + f(x)$ *avec* $f(x) = O(|x|^2)$ *si* $x \to 0$ *en le système linéaire* $\dot{y} = Ay$.

5.2 Intégrabilité, linéarisation et commutativité

Le premier théorème énoncé assure qu'un champ de vecteurs analytique est linéarisable si et seulement si il existe un champ de vecteurs analytique qui commute pour le crochet de Lie.

Théorème 5.2.1. *On considère l'équation différentielle analytique (5.1) que l'on suppose non dégénéré en l'origine qui est un point singulier et le champ de vecteurs analytique (5.2) associé.*
Le champ X *est linéarisable si et seulement si il existe un champ de vecteurs analytique* $Y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + O(|x|^2))\partial_{x_i}$ *tel que* $[X, Y] = 0$.

Le lemme suivant va nous permettre de démontrer le théorème :

Lemme 5.2.2. *L'annulation d'un crochet de deux champs de vecteurs X et Y, i.e. $[X,Y]=0$, est invariante par changement de coordonnées.*

Démonstration du lemme. On utilise la conjugaison de champs de vecteurs, déjà introduite précédemment. Soit X un champ de vecteurs, notons X_{nor} le nouveau champ après un changement de variable noté h. On doit avoir $X_{nor}(\varphi \circ h) = (X.\varphi) \circ h$ pour tout $\varphi \in \mathbb{K}\{x\}$.
On suppose que Les champs X et Y commutent pour le crochet de Lie. Soient X_{nor} et Y_{nor} les nouveaux champs obtenus par le changement de variables. Calculons leur crochet pris sur $g = \varphi \circ h$:

$$\begin{aligned}[X_{nor}, Y_{nor}](g) &= X_{nor}(Y_{nor}(g)) - Y_{nor}(X_{nor}(g)) \\ &= X_{nor}((Y.\varphi) \circ h) - Y_{nor}((X.\varphi) \circ h) \\ &= (X.Y.\varphi) \circ h - (Y.X.\varphi) \circ h \\ &= [X,Y](\varphi \circ h) = 0.\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème. Si le système est linéarisable alors il existe un changement de coordonnées de la forme $x = y + F(y)$ avec $y \in \Omega$, $F(y) = O(|y|^2)$ si $y \to 0$ et $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage de l'origine. Le système linéarisé est donc de la forme $\dot{x}= Ax$ où A est une matrice de taille $n \times n$, le champ associé $\tilde{X}$ est de la forme $\tilde{X} = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}x_j\partial_{x_i}$. Or le champ $\tilde{X}$ commute avec le champ $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\partial_{x_i}$, en effet

$$\begin{aligned}[\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}x_j\partial_{x_i}(\sum_{l=1}^{n} x_l\partial_{x_l}) - \sum_{l=1}^{n} x_l\partial_{x_l}(\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}x_j\partial_{x_i}) \\ &= \sum_{\substack{l=1\\j=1\\i=1}}^{n} (a_{ij}x_i\partial_{x_i}(x_l)\partial_{x_l} - x_l\partial_{x_l}(a_{ij}x_j)\partial_{x_i}) \\ &= \sum_{l=1} a_{ll}x_l\partial_{x_l} - x_l a_{ll}\partial_{x_l} = 0.\end{aligned}$$

La commutation de champs via le crochet de Lie est invariante par changement de coordonnées, on applique alors le changement inverse de coordonnées à $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ on a donc bien $[X,Y]=0$.

Réciproquement on suppose l'existence d'un champ analytique $Y = \sum_{i=1}^{n}(x_i + O(|x|^2))\partial_{x_i}$ qui vérifie $[X,Y]=0$. La partie linéaire de Y a pour valeur propre multiple 1 donc le spectre est non résonant puisqu'aucun n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\alpha_1 + ... + \alpha_n \geq 2$ ne vérifie $\alpha_1 + ... + \alpha_n - 1 = 0$. Le spectre est donc non résonant et dans le domaine de Poincaré, le théorème de linéarisation de Poincaré nous permet de linéariser le champ Y sous la forme $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n}$. On note $\tilde{X}$ le champ obtenu à partir de X par le changement de variable qui linéarise Y. On a donc encore $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ par le même argument que précédemment. Notons $\tilde{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)\partial_{x_i}$. Calculons le crochet de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ que l'on sait nul :

$$
\begin{aligned}
[\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} g_i(x)\partial_{x_i}(x_j)\partial_{x_j} - x_j\partial_{x_j}(g_i(x))\partial_{x_i} \\
&= \sum_{i=j=1}^{n} g_i(x)\partial_{x_i} - \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} x_j\partial_{x_j}(g_i(x))\partial_{x_i} = 0.
\end{aligned}
$$

On a donc pour tout $i = 1, ..., n$:

$$
g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j}(g_i(x)).
$$

On rappelle que d'après le théorème d'*Euler*, une fonction différentiable est 1-homogène si et seulement si elle vérifie l'équation ci-dessus. Or une fonction 1-homogène est linéaire donc le champ $\tilde{X}$ est linéaire. Le champ X est donc linéarisable par le même changement de variables que le champ Y. □

Le théorème suivant met en lien l'intégrabilité et l'opérateur adjointe par le crochet de Lie :

Théorème 5.2.3. *On se place dans le cas n=2 et on considère le système différentiel analytique (5.1) dont l'origine est un point singulier non dégénéré et on note $X = f_1(x,y)\partial_x + f_2(x,y)\partial_y$ son champ de vecteurs analytique associé. Ce système est intégrable si et seulement il existe un champ de vecteurs analytique Y de la forme $Y = (x + o(x,y))\partial_x + (y + o(x,y))\partial_y$ et une fonction scalaire analytique μ qui vérifie $\mu(0,0) = 0$ tels que $[X,Y] = \mu X$.*

Démonstration. Si le champ X est intégrable dans un voisinage de l'origine, d'après les rappels il existe un changement de coordonnées analytique de la forme $(u,v) = (x + o(x,y), y + o(x,y))$ qui transforme X en le champ $\bar{X} = (\alpha_1 u + \beta_1 v)h(u,v)\partial_u + (\alpha_2 u + \beta_2 v)h(u,v)\partial_v$ où $h(u,v) = 1 + g(u,v)$ avec $g(u,v) = O(u,v)$. On obtient un champ linéaire en posant $\tilde{X} = r(u,v)\bar{X}$ où $r(u,v) = \frac{1}{h(u,v)}$. On applique le changement de coordonnées inverse au champ $\tilde{X}$, il résulte que le champ $R(x,y)X$ est linéarisable. En appliquant le théorème précédent, on obtient l'existence d'un champ de vecteurs analytique $Y = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + O(|x|^2))\partial_{x_i}$ tel que $[R(x,y)X, Y] = 0$.
De plus, si on calcule le crochet, on a

$$
\begin{aligned}
[R(x,y)X, Y] &= R(x,y)X(Y) - Y(R(x,y)X) \\
&= R(x,y)X(Y) - Y(R(x,y))X - R(x,y)Y(X) \\
&= R(x,y)[X,Y] - Y(R(x,y))X \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Il est résulte que $[X,Y] = \mu(x,y)X$ où $\mu(x,y) = \frac{Y(R(x,y))}{R(x,y)}$.
Il reste à vérifier que $\mu(0,0) = 0$. Comme G est tangent à l'identité, on écrit $G(x,y) = 1 + g_1(x,y) + o(x,y)$, alors $Y(G) = \tilde{g}(x,y) + o(x,y)$ donc $\mu(0,0) = 0$.
Réciproquement, supposons qu'il existe un champ de vecteurs analytique $Y = (x + o(x,y))\partial_x + (y + o(x,y))\partial_y$ et une fonction scalaire analytique μ avec $\mu(0,0) = 0$ tels que $[X,Y] = \mu X$. Alors il existe

une fonction scalaire analytique λ avec $\lambda(0,0) = 1$ tel que

$$\nabla\lambda(x,y).Y - \mu(x,y)\lambda(x,y) = 0. \tag{5.5}$$

Pour démontrer l'existence de la solution λ, on utilise le changement de coordonnées analytique $(u,v) = (x + o(x,y), y + o(x,y))$ qui transforme le champ Y en $\bar{Y} = u\partial_u + v\partial_v$. Ce changement est licite par le théorème de Poincaré. On note $\bar{\mu}$ et $\bar{\lambda}$ les fonctions μ et λ obtenues par le même changement de variables, on a $\bar{\mu}(0,0) = 0$ et $\bar{\lambda}(0,0) = 1$. Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation précédente devient :

$$u\partial_u(\bar{\lambda}) + v\partial_v(\bar{\lambda}) = \bar{\mu}(u,v)\bar{\lambda}(u,v).$$

On vérifie que la solution est donnée par

$$\bar{\lambda}(u,v) = exp\left(\int_{-\infty}^{0} \bar{\mu}(ue^t, ve^t)dt\right)$$

avec $\bar{\lambda}(0,0) = 1$. Il suffit de considérer la fonction $t \mapsto \bar{\mu}(ue^t, ve^t)$ et la dériver.
Comme $\bar{\mu}$ est analytique dans un voisinage de l'origine et $\bar{\mu}(0,0) = 0$, $\bar{\lambda}$ est analytique par composition dans un voisinage de l'origine. En utilisant le changement de coordonnées inverses on retrouve la fonction analytique λ satisfaisant l'équation initiale avec $\lambda(0,0) = 1$.
On rappelle que $[X,Y] = \mu X$, on a donc :

$$\begin{aligned}
[Y, \lambda X] &= Y(\lambda)X + \lambda Y(X) - \lambda X(Y) \\
&= Y(\lambda)X - \lambda[X,Y] \\
&= Y(\lambda)X - \lambda\mu X \\
&= (\nabla\lambda.Y - \lambda\mu)X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le théorème précédent implique que le champ est λX est linéarisable donc X est intégrable. □

Remarque 5.2.4. *L'équation (5.5) montre que l'existence d'un courbe invariante pour le champ Y de cofacteur μ.*

Exemple 5.2.5. *Nous allons illustrer le théorème 5.2.1 issu de [13]. On considère le champ de vecteurs*

$$X = (2x - 4y^2 + 6cy^4)\partial_x - y(1 - 3cy^2)\partial_y,$$

où $c \in \mathbb{R}^+$. Un commutateur de X est donné par le champ suivant

$$Y = (x + y^2 - 6cy^4)\partial_x + y(1 - 3cy^2)\partial_y.$$

On vérifie que le crochet s'annule bien :

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= (2x - 4y^2 + 6cy^4)\left(\partial_x(x + y^2 - 6cy^4)\partial_x\right) \\
&- y(1 - 3cy^2)\left(\partial_y(x + y^2 - 6cy^4)\partial_x + \partial_y(y(1 - 3cy^2))\partial_y\right) \\
&- (x + y^2 - 6cy^4)\left(\partial_x(2x - 4y^2 + 6cy^4)\partial_x\right) \\
&- y(1 - 3cy^2)\left(\partial_y(2x - 4y^2 + 6cy^4)\partial_x + \partial_y(-y(1 - 3cy^2))\partial_y\right) \\
&= (2x - 4y^2 + 6cy^4)\partial_x - y(1 - 3cy^2)(2y - 24cy^3)\partial_x + y(1 - 3cy^2)(9cy^2 - 1)\partial_y \\
&- 2(x + y^2 - 6cy^4)\partial_x - y(1 - 3cy^2)(-8y + 24cy^3)\partial_x - y(1 - 3cy^2)(9cy^2 - 1)\partial_y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 5.2.1, le champ X est linéarisable, on dispose du changement de variables qui permet la transformation :

$$x = u + \frac{v^2}{1 + 3cv^2} \text{ et } y = \frac{v}{\sqrt{1 + 3cv^2}}.$$

Pour obtenir le champ linéarisé nous allons travailler sur l'équation différentielle associée au champ :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y^2 + 6cy^4 \\ \dot{y} = -y(1 - 3cy^2) \end{cases}$$

On remarque que $u = x - y^2$, on dérive cette expression en temps

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \dot{x} - 2y\dot{y} \\
&= 2x - 4y^2 + 6cy^4 + 2y^2(1 - 3cy^2) \\
&= 2(x - y^2) \\
&= 2u.
\end{aligned}$$

Pour $\dot{v}$, on part de l'expression de y^2 qui donne $v^2 = y^2(1 + 3cv^2)$. En dérivant en temps, on a

$$\begin{aligned}
&2v\dot{v} = 2y\dot{y}(1 + 3cv^2) + 6cy^2 v\dot{v}, \\
\Rightarrow &2v\dot{v}(1 - 3cy^2) = -2y^2(1 - 3cy^2)(1 + 3cv^2), \\
\Rightarrow &2v\dot{v} = -2v^2,
\end{aligned}$$

d'où $\dot{v} = -v$. Le système linéarisé est donné par

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u \\ \dot{v} = -v. \end{cases}$$

5.3 Vers la conjecture de Terao

On peut énoncer le théorème suivant dans $\mathbb{C}^n$, qui permet une ouverture vers la conjecture de Terao :

Théorème 5.3.1. *Soient $\mathcal{A}$ un arrangement de droites et $D(\mathcal{A})$ son module de dérivations associé. Supposons que ce module n'est pas libre, on peut alors avoir des relations du type $PX + Y = 0$ où X et $Y \in D(\mathcal{A})$ et P un polynôme.*
Dans ce cas, le champs X est intégrable.

Démonstration. Calculons le crochet $[PX + Y, Y]$:

$$\begin{aligned}[PX + Y, Y] &= [PX, Y] + [Y, Y] \\ &= PX(Y) - Y(P)X - PY(X) \\ &= P[X, Y] - Y(P)X = 0.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation :

$$[X, Y] = \mu X.$$

On peut alors utiliser le théorème de la section précédente, on obtient l'intégrabilité en supposant $P(0, 0) \neq 0$ et $\mu(0, 0) = 0$.
On peut observer que des relations de non-liberté dans le module de dérivations impliquent l'intégrabilité des champs concernés par cette relation. □

Conclusion et perspectives

Au cours de ce mémoire, nous avons mis en place des ponts entre la géométrie et les systèmes dynamiques. Le premier outil est la méthode de Darboux qui donne une interprétation dynamique de l'invariance de courbes algébriques : l'intégrabilité. On a notamment réécrit l'action de $\mathbb{C}^*$ sur les champs de vecteurs quadratiques et expliciter une classe de champs particulières : les champs de Darboux.

Nous avons montré, après des rappels sur les algèbres de Lie, que le module de dérivations associé à un arrangement de droites peut être muni d'une structure d'algèbres de Lie.

Dans un troisième temps, on a étudié le problème du centre au travers de nombreux outils, d'abord par la forme normale de Poincaré-Dulac qui nous avons pu caractériser algébriquement via ses coefficients. Vient ensuite le calcul moulien. Si la partie linéaire du système étudié est un centre alors s'il est linéarisable, le système initial est aussi un centre. C'est dans ce cadre que l'on a introduit les équations mouliennes de conjugaison de champs de vecteurs, puis le théorème de linéarisation formelle.

Les propriétés de résolubilité et nilpotence des algèbres de Lie nous ont permis d'énoncer de nouveaux théorèmes via la notion nouvelle d'algèbres de Lie résonantes et algèbres de Lie isochrone. Ces notions permettent de récupérer des propriétés de centre non par l'étude directe de champs de vecteurs via ses coefficients par exemple mais par les algèbres de Lie associées.

Enfin le dernier chapitre a permis de voir l'équivalence entre intégrabilité et existence de commutateur pour le crochet de Lie d'un champs de vecteurs, ainsi que de lien entre intégrabilité et valeur propre pour l'application adjointe d'un champ de vecteurs. On constate enfin que des relations de non-liberté entre deux champs implique la intégrabilité de l'un des deux champs.

Les perspectives sont nombreuses. On pourra par exemple poursuivre l'étude des formes normales sur les champs de vecteurs hamiltoniens, notamment la forme normale de Birkhoff, de plus nous sommes restés dans la classe formelle pour la linéarisation, l'arborification est un outil qui permet de passer à la classe analytique. Le calcul moulien permet aussi de réécrire la forme normale de Poincaré-Dulac.

En ce qui concerne la conjecture de Terao et les modules de dérivations, l'article de Michel Granger et Mathias Schulze (voir [14]) donne une relation entre des propriétés de résolubilité et de liberté des modules de dérivations. Un objectif pourrait être la réécriture des propriétés énoncées dans une version algorithmique et constructive par le calcul moulien. Ceci pourrait conforter l'interprétation dynamique donné dans le chapitre 5 de la conjecture de Terao.

Bibliographie

[1] V.Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ed. Libraire du Globe, 1996.

[2] J.C.Artés, F.Dumortier et J.Llibre *Qualitative Theory of planar differential systems*, Springer, 2006.

[3] N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre 1, Hermann, 1971.

[4] N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre 2 et 3, Hermann, 1972.

[5] P.Cartier, *Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire*, Séminaire N.Bourbaki, 1980-81, exp.n°561, p.1-22.

[6] R.Conti, *Centers of planar polynomial systems.A review.*, 1998.

[7] J.Cresson, *Calcul Moulien*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 18 (2009), no. 2, p. 307–395.

[8] J.Cresson, *Mould calculus and normalization of vector fields*, Lectures at the University of Pisa, April 2006.

[9] J.Cresson, B.Guerville-Ballé et J. Viu Sos, *Dynamical approach to logarithmic vector fields.*

[10] J.Cresson et J.Raissy, *About the Trimmed and the Poincaré-Dulac Normal Form of Diffeomorphisms*, 2006.

[11] J.Cresson et B.Schuman, *Formes normales et problème du centre*, Bull. Sci. Math. 125, 3, p.235-252, 2001.

[12] J.P. Françoise, *Géométrie analytique et systèmes dynamiques*, Edition Puf, 1995.

[13] J.Giné et M.Grau, *Linearizability and integrability of vectors fields via commutation*, J.Math. Anal. Appl. 319 326-332, 2006.

[14] M.Granger et M.Schulze, *On the formal structure of logarithmic vector fields*, Compositio Mathematicae 142 (3), 765-778, 2006.

[15] B.Guerville-Ballé et J.Viu-Sos , *Combinatorics of line arrangements and dynamics of polynomial vector fields*, 2015.

[16] Y.Ilyashenko et S.Yakovenko, *Lectures on Analytic Diffrential Equations*, Graduate studies in Mathematics, volume 86, American Mathematical Society, 2007.

[17] N.Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications , 1979.

[18] J.Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Edition EDP Sciences, 2010.

[19] B.Malgrange, *Frobenius avec singularités.II.Codimension un*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S, tome 46 (1976), P.163-173.

[20] Ch.M. Marle, *Systèmes dynamiques, une introduction*, Editions Ellipses, 2003.

[21] J. Martinet, *Normalisation de champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D. Brjuno)*, Séminaire Bourbaki, no.564, 1980.

[22] G.Morin, *Calcul moulien et théorie des formes normales classiques et renormalisées*, Observatoire de Paris, 2010.

[23] P.Orlik et H.Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer, 2010.

[24] P.Polo, *Cours : Introduction aux groupes et algèbres de Lie*, http://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2/, 2007-2008.

[25] C.Reutenauer, *Free Lie algebras*, London Math. Soc. Monographs, 1993.

[26] M.Sabatini, *Quadratic isochronous centers commute*, 1999.

[27] K.Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, 1980.

[28] B.Schuman, *Correction et linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux.*

[29] J-P.Serre, *Lie algebras and Lie groups*, W.C. Benjamin Inc, 1965.

[30] H.Zoladek, *Quadratic systems with center and their perturbations*, Journal of differential equations 109,p.223-273, 1994.